

BTVN C2.

1. Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân sau

$$1) \int_{-\infty}^0 x e^x dx$$

$$4) \int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$2) \int_0^{+\infty} \cos x dx$$

$$5) \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

2. Xét sự hội tụ của các tích phân sau

$$1) \quad I = \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$2) \quad I = \int_1^{+\infty} e^{-x^{10}} \cos 3x dx$$

$$3) \quad I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

$$8) \quad I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln \frac{x+2}{x}}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$4) \quad I = \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x} dx$$

$$9) \quad I = \int_1^{+\infty} \left(x^{\frac{1}{x}} - 1 \right) dx$$

$$5) \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{2+e^x} dx$$

$$10) \quad I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

$$6) \quad I = \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2 \cos^2 x} dx$$

$$11) \quad I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$7) \quad I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln^4 x + 1}}$$

$$12) \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

$$\mathbf{13)} \quad I = \int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx$$

$$\mathbf{18)} \quad I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}$$

$$\mathbf{14)} \quad I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

$$\mathbf{19)} \quad I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{(x^2 + 1) \sin x}} dx$$

$$\mathbf{15)} \quad I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\ln^2(x+1)}$$

$$\mathbf{20)} \quad I = \int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$$

$$\mathbf{16)} \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

$$\mathbf{21)} \quad I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$\mathbf{17)} \quad I = \int_0^1 \frac{dx}{x + 2\sqrt{x}}$$

Bài tập tự làm: Xét sự hội tụ của các tích phân sau

$$1) \quad I = \int_1^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^3} dx$$

$$5) \quad I = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1} dx$$

$$2) \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$$

$$6) \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^4} dx$$

$$3) \quad I = \int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^3}} dx$$

$$7) \quad I = \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3 + \sin^2 x} dx$$

$$4) \quad I = \int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx$$

$$8) \quad I = \int_0^3 \frac{2x^3}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$9) \quad I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$$

$$13) \quad I = \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}$$

$$10) \quad I = \int_0^1 \frac{dx}{\tan x - x}$$

$$14) \quad I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x} - 1}$$

$$11) \quad I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}$$

$$15) \quad I = \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}$$

$$12) \quad I = \int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{e^{\sin x} - 1} dx$$

Đáp án Bài tập tự làm:

Hội tụ: Câu 2, 4, 5, 6, 7, 8, 12

Phân kỳ: Câu 1, 3, 9, 10, 11, 13, 14, 15

BTVN C3. 1. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số sau

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right)$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \tan \frac{1}{n^2} \right)$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{\sqrt{2n}}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(e^{1/n} - 1 \right)$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n + 5^n}$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n + n}$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4.6... (2n)}{n^n}$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$$

$$11) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}$$

$$12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$$

$$13) \quad \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{9} + \frac{5}{9\sqrt{3}} + \dots$$

$$14) \quad 1 + \frac{1}{e^3} + \frac{1}{e^{12}} + \frac{1}{e^{27}} + \frac{1}{e^{48}} + \frac{1}{e^{75}} + \dots$$

$$15) \quad 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^8} + \frac{1}{e^{27}} + \frac{1}{e^{64}} + \frac{1}{e^{125}} + \dots$$

$$16) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{1 + n}$$

2. Khảo sát sự hội tụ và tính tổng của chuỗi số nếu chuỗi hội tụ

$$1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$$

$$3) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^n}{3^n}$$

$$2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} \right)$$

$$4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x+2)^n}{n 2^n}$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n (x-2)^{2n}}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 3^n (x-5)^n}$$

$$6) \frac{x+1}{1!} + \frac{(x+1)^2}{3!} + \frac{(x+1)^3}{5!} + \dots$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$$

$$7) \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 3^n) x^n$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \left(\frac{2x-3}{x} \right)^n$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{7}{10^n x^n} \right)$$

BTVN C4. Tìm các giới hạn sau

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 2}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} \left(1 + xy^2\right)^{\frac{1}{x^7 + xy}}$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$$

$$4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x \arctan \frac{y}{x}$$

$$5) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$6) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

$$7) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}$$

$$8) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$$

$$9) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$$

$$10) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{y^3 + xy^2}{x^2 + y^2}$$

$$11) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^3}{2x^2 + 3y^6}$$

$$12) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$13) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$$14) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x + y}$$

$$15) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + y)}{y}$$

Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $(0,0)$

$$1) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{2)} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{3)} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{4)} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{5)} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

BTVN C4. 1) Khảo sát sự liên tục và sự tồn tại, liên tục của các đạo

hàm riêng của hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2) Chứng minh rằng hàm số $z = y \ln(x^2 - y^2)$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{1}{x} z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{z}{y^2}$$

3) Cho $f(u)$ là hàm một biến khả vi. Chứng minh rằng hàm

$z = f(x^2 + y^2)$ thỏa mãn phương trình $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

4) Cho $f(u)$ là hàm một biến khả vi. Chứng minh rằng hàm

$z = y f(x^2 - y^2)$ thỏa mãn phương trình $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + x y \frac{\partial z}{\partial y} = x z$

5) a) Bằng phép đổi biến số $u = x + y$, $v = x + 2y$, tìm hàm số $z(x, y)$ thỏa mãn phương trình: $2z'_x - z'_y = 0$

b) Tìm hàm số $z(x, y)$ thỏa mãn phương trình: $xz'_x - yz'_y = x^2 - y^2$ bằng phép đổi biến số $u = x + y$, $v = xy$

6) Tìm vi phân toàn phần của các hàm số

a) $z = \sin(x^2 + y^2)$; **b)** $z = e^x(\cos y + x \sin y)$

7) Tính gần đúng: **a)** $A = \ln \left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1 \right)$

b) $A = \left(\sqrt{15,98} \right) \cot 137^\circ$

c) $A = \left(\sqrt{3,99} \right) \arctan 1,02$

d) $A = \sin 28^\circ \cos 61^\circ$ biết rằng $\cos \frac{\pi}{6} = 0,87$; $\frac{\pi}{180} = 0,017$

e) $A = (2,01)^{3,03}$ biết rằng $\ln 2 = 0,69$

1) Tính đạo hàm y' , y'' của hàm số ẩn xác định bởi phương trình

sau: $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$

2) Hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi hệ thức:

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 + xy - 3z - 13 = 0. \text{ Tính các đạo hàm riêng}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M); \frac{\partial z}{\partial y}(M) \text{ và } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M) \text{ với } M(1, 2, -1)$$

3) $z = f(x, y)$ là hàm số ẩn xác định từ phương trình: $z - xe^{\frac{z}{y}} = 0$.

Tính gần đúng $f(0,02; 0,99)$

4) Cho $u = \frac{x+z}{y+z}$. Tính u'_x, u'_y biết rằng z là hàm số ẩn của x, y xác

định bởi phương trình: $ze^z = xe^x + ye^y$

5) Kiểm tra hàm $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ có thỏa mãn hệ thức sau không?

$$x \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + y \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = u$$

6) Chứng minh rằng hàm số $u = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

7) Chứng minh rằng hàm số $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$, trong đó f là một hàm số có đạo hàm cấp hai liên tục, thỏa mãn phương trình: $z''_{x^2} z''_{y^2} = (z''_{xy})^2$