Trường Đại học Công Nghệ thông tin

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

(Tài liệu nội bộ)

Bộ môn Toán-Lý

8/10/2015

Mục lục

CHƯƠNG 1 : SỐ PHỨC

Vào thế kỷ 16, G. Cardano (1501-1576) đã nói đến các số "ảo" như là căn của các số âm. Sau đó, khái niệm số ảo cũng xuất hiện trong các nghiên cứu của các nhà toán học thế kỷ 18. Khái niệm số "ảo" tưởng chừng như không bao giờ gặp trong thực tế đã trở thành nền tảng để phát triển các ngành toán học có rất nhiều ứng dụng trong các ngành vật lý và kỹ thuật khác nhau.

1.1. Khái niệm

- Số phức z là biểu thức có dạng: $z = x + iy$

trong đó x, y là các số thực, còn ký hiệu i gọi là đơn vị ảo thỏa $i^2 = -1$,

- Ta gọi $x = \text{Re}(z)$, $y = \text{Im}(z)$ lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức z.

- Khi $z = x + i.0$, ta nói z là một số thực

- Khi $z = 0 + iy$, ta nói z là một số thuần ảo.

Ví dụ 1. 1 Số phức $z = 2 - 3i$ có phần thực $\text{Re}(z) = 2$, phần ảo $\text{Im}(z) = -3$

- Người ta thường ký hiệu tập hợp các số phức là $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + iy \,/\, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

($\mathbb{R}$ là tập các số thực)

- Số phức $\overline{z} = x - iy$ được gọi là số phức liên hợp của số phức $z = x + iy$.

Thấy ngay $\overline{\overline{z}} = z$.

Ví dụ 1. 2 Số phức $z = 2 + i\sqrt{3}$ có số phức liên hợp với nó là

$$\overline{z} = 2 - i\sqrt{3}$$

- Hai số phức được gọi là bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng lần lượt bằng nhau

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

Ví dụ 1. 3 Tìm x, y sao cho hai số phức sau bằng nhau

$$z_1 = x + iy;\ z_2 = -y + 2 + i(x - 1)$$

Giải:

$$x + iy = -y + 2 + i(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + 2 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1.2. Các dạng biểu diễn của số phức

Người gọi biểu diễn $\boxed{z = x + iy}$ là **dạng đại số** của số phức z.

1.2.1. Dạng hình học của số phức

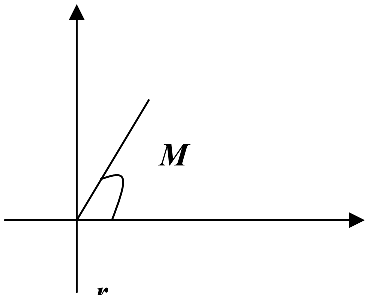
Cho số phức $z = x + iy$ tương ứng với điểm M có tọa độ (x, y) trong mặt phẳng tọa độ Đềcác. Đây là tương ứng 1 – 1 nên ta có thể đồng nhất điểm $\mathrm{M}(x, y)$ trong mặt phẳng tọa độ với số phức

$z = x + iy$. Điểm M(x, y) gọi là biểu diễn hình học của số phức $z = x + iy$

Ghi chú: Vì lý do trên, đôi khi người ta còn gọi mặt phẳng tọa độ Đềcác là **mặt phẳng phức**.

1.2.2. Môđun, argumen, dạng lượng giác của số phức

Trong hệ toạ độ cực, điểm M ứng với số phức có thể xác định bởi độ dài đoạn OM và góc giữa tia Ox và tia OM



- Mođun của z: độ dài đoạn OM được gọi là môđun của số phức z, ký hiệu là $\mathrm{mod}(z) = |z| = r$.

Thấy ngay $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

- Argumen của z: Góc lượng giác giữa tia Ox và tia OM được gọi là argumen của số phức z và ký hiệu Arg(z)
- Nếu φ là một giá trị nào đó của góc giữa tia Ox và tia OM thì Arg(z) có thể là $Arg(z) = \varphi + k.2\pi\ (k \in Z)$
- Để dễ xác định, người ta thường lấy góc $\varphi \in (-\pi, \pi]$ và ký hiệu arg(z): $-\pi < \arg(z) \le \pi$

Ví dụ 1. 4 Số phức $z = 1 + i\sqrt{3}$ có môdun và argument như sau:

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2\,; \quad Arg(z) = \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Thấy ngay, mối liên hệ giữa x, y, r, φ cho bởi hệ thức:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \tag{1.2}$$

φ là góc sao cho $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x},\ x \neq 0$

Vậy $z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$

Hay $$\boxed{z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} \tag{1.3}$$

Dạng này gọi là dạng lượng giác của số phức.

Ví dụ 1. 5 Theo ví dụ 1.4 thì số phức $z = 1 + i$ có

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2\,;\quad Arg(z) = \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

nên nó có dạng lượng giác là

$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right)\right]$$

Theo biểu diễn hình học, ta thấy ngay rằng: Hai số phức ở dạng lượng giác bằng nhau khi mô đun của chúng bằng nhau và các argument của chúng sai khác nhau một bội của 2π.

Nghĩa là nếu

$$z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$$

$$z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$$

thì

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + k2\pi \end{cases} \tag{1.4}$$

Bên cạnh đó, ta có thể suy ra dạng lượng giác của một số phức như sau:

Giả sử ta có số phức $z = x + iy \neq 0$

Có thể viết lại z như sau:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

Thấy ngay do $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 = 1$

nên tìm được góc lượng giác φ sao cho

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Nghĩa là ta tìm được biểu diễn lượng giác (1.3) của số phức

1.2.3. Dạng mũ của số phức

Ta chấp nhận công thức Euler:

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi} \tag{1.5}$$

Số phức có thể viết ở dạng:

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}} \tag{1.6}$$

Dạng trên gọi là dạng mũ của số phức.

Ví dụ 1. 6 Từ ví dụ 1. 5 thấy ngay số phức $z = 1 + i$ có dạng mũ là

$$z = \sqrt{2}e^{\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right)i}$$

1.3. Phép toán trên tập số phức

Sau đây là biểu diễn các phép toán đối với số phức ở dạng đại số. Để hiểu được các phép toán dưới, chỉ cần nhớ $i^2 = -1$

Cho hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1; \quad z_2 = x_2 + iy_2$

1.3.1. Phép cộng

Tổng hai số phức z_1 và z_2 là một số phức ký hiệu z_1+z_2 được tính theo công thức:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{1.7}$$

Ta hiểu phép cộng được thực hiện bằng cách cộng các phần thực và phần ảo tương ứng.

Phép cộng có các tính chất :

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

$$z + 0 = 0 + z = z$$

1.3.2. Phép trừ

Hiệu của hai số phức z_1 và z_2 là một số phức ký hiệu z_1-z_2 và được tính như sau:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \tag{1.8}$$

1.3.3. Phép nhân

Tích hai số phức z_1 và z_2 là một số phức ký hiệu z_1z_2 và được tính:

$$z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1x_2 + y_1y_2) \tag{1.9}$$

Ví dụ 1. 7 $\left(1 + 2i\right)^2 = (1)^2 + 2(1)(2i) + (2i)^2 = -3 + 4i$

Phép nhân có các tính chất:

$$z_1z_2 = z_2z_1$$

$z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$

$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

$1.z = z.1 = z; \;\; z.0 = 0.z = 0$

$i.i = (0+i)(0+i) = -1$

$z.\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$

Nhận xét:

☐Phép trừ chính là hệ quả của phép cộng và phép nhân như sau:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-1)z_2$$

☐Từ tính chất cuối, ta thấy ngay công thức

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z.\overline{z}} \tag{1.10}$$

1.3.4. Phép chia

Thương của hai số phức z_1 và z_2 là một số phức ký hiệu $\frac{z_1}{z_2} = z$ *thỏa mãn điều kiện:* $z_2z = z_1$

Theo tính chất kết hợp của phép nhân, để tìm phần thực, phần ảo của thương ta có thể nhân cả số bị chia và số chia với số phức liên hợp của số chia

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} \tag{1.11}$$

♦ Nếu số phức có dạng lượng giác hoặc dạng mũ

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1e^{i\varphi_1}$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2e^{i\varphi_2}$$

thì nói chung ta chỉ có thể biểu diễn hai phép nhân và chia trong hai dạng biểu diễn này.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \left(r_1 r_2\right) e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \\ &= \left(r_1 r_2\right)\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right] \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \tag{1.13}$$

1.3.5. Lũy thừa

Ta có lũy thừa 1 của số phức z là $z^1 = z$

Định nghĩa: Lũy thừa bậc n của số phức z là

$$\boxed{z^n = z.z^{n-1}} \tag{1.14}$$

Nếu viết số phức ở dạng mũ $z = re^{i\varphi}$ thì ta có công thức

$$\boxed{z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{ni\varphi} = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)} \tag{1.15}$$

Công thức trên còn gọi là công thức Moivre.

Ví dụ 1. 8 Tính và trình bày kết quả dạng đại số

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}$$

Giải:

Dạng lượng giác của số phức là

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+k2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+k2\pi\right)\right)$$

suy ra $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10} =$

$$2^{10}\left(\cos\left(10\frac{\pi}{3}+10.k.2\pi\right)+i\sin\left(10\frac{\pi}{3}+10.k.2\pi\right)\right)$$

Đưa ngược lại dạng đại số :

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}=2^{10}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2^{9}-i.2^{9}.\sqrt{3}$$

Ví dụ 1. 9 Tính $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

Giải:

Làm tương tự ví dụ 1.8 , ta có

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{20}=2^{20}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$(1-i)^{20}=...=-2^{10}$ (Sinh viên tự làm)

$$\Rightarrow\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}=2^{9}-2^{9}i\sqrt{3}$$

1.3.6. Khai căn bậc n (nguyên dương)

Định nghĩa: $\sqrt[n]{z}=w$ *với w thỏa mãn tính chất* $w^{n}=z$.

Giả sử $z=re^{i\varphi}; w=\mu e^{i\psi}$ thì do $w^n=z$ nên ta có $\mu^{n}e^{in\psi}=re^{i\varphi}$. Hai số phức bằng nhau khi mođun bằng nhau và argumen sai khác nhau k lần 2π nên ta có

$$\begin{cases}\mu^{n}=r\\ n\psi=\varphi+k2\pi\end{cases}$$

suy ra $\mu = \sqrt[n]{r}$ (lấy căn trong tập số thực) và

$$\psi = \frac{\varphi + k2\pi}{n} \tag{1.16}$$

Về nguyên tắc, ta có thể lấy mọi giá trị nguyên của k, nhưng khi k bằng n trở lên thì các giá trị của căn lặp lại nên chỉ cần lấy k = 0, 1, …, (n-1) ta được n giá trị khác nhau của căn bậc n của z.

Tóm lại ta có các căn bậc n của số phức dạng lượng giác

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ như sau:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right),\ k = 0,1,\dots,n-1$$

(1.17)

Ví dụ 1. 10 Tìm $\sqrt{1}$

Giải:

$1 = \cos 0 + i\sin 0$

$\Rightarrow$ các căn bậc 2 của 1 là $z_k = \cos\frac{k2\pi}{2} + i\sin\frac{k2\pi}{2}$,k=0,1. Hay

$$z_0 = 1;\quad z_1 = -1$$

Ví dụ 1. 11 Tìm $\sqrt[3]{z}$, $z = 1 - i$

Giải:

Ta có $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Suy ra các căn bậc 3 của z là

$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-\pi/4 + k2\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi/4 + k2\pi}{3}\right),$

$k = 0,1,2$

Cụ thể

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\pi}{12} + i\sin\frac{-\pi}{12}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{12} + i\sin\frac{15\pi}{12}\right)$$

Trong trường hợp tìm căn bậc 2, ta có thể dùng điều kiện bằng nhau của 2 số phức để tìm căn, xem ví dụ sau:

Ví dụ 1. 12 Tìm $\sqrt{z}$, $z = 3 - 4i$

Giải:

Giả sử căn cần tìm là $x + iy$

Ta phải có $(x + iy)^2 = 3 - 4i$

Suy ra $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \ (1) \\ 2xy = -4 \quad (2) \end{cases}$

(2) $\Rightarrow y = -\dfrac{2}{x}$ ($x.y \neq 0$)thay vào (1), ta được

$$x^4 - 4 = 3x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = -1 \ (loai) \\ x^2 = 4 \ (nhan) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y = \mp 1$$

Vậy $3 - 4i$ có 2 căn bậc 2 là $2 - i$ và $-2 + i$

1.4. Giải phương trình bậc 2 trong tập số phức

Ta giải tương tự như trong tập số thực. Xem ví dụ sau:

Ví dụ 1. 13

a). Phương trình $z^2 + 1 = 0$ có 2 nghiệm là $z = \pm i$

b). Giải phương trình $z^2 + z + 1 = 0$

Giải: Tính biệt thức Delta $\Delta = 1 - 4 = -3$

Suy ra $\sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{3}$

Vậy 2 nghiệm của phương trình đã cho là :

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

c). Giải phương trình $z^2 - \left(1 + i\sqrt{3}\right)z - 1 + i\sqrt{3} = 0$

Giải:

Tính Delta: $\Delta = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^2 - 4\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$

$$= 2 - 2i\sqrt{3}$$

Tính căn delta: $\sqrt{\Delta} = \pm\left(\sqrt{3} - i\right)$

Nghiệm của phương trình là

$$z_{1,2} = \frac{1 + i\sqrt{3} \pm \left(\sqrt{3} - i\right)}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} \mp 1}{2}i$$

Bài tập

<u>Bài 1.1</u>: Cho số phức z, chứng minh rằng

$$\operatorname{Re} z = \frac{\overline{z} + z}{2}; \quad \operatorname{Im} z = i\frac{\overline{z} - z}{2}$$

<u>Bài 1.2</u>: Tìm nghiệm thực (x,y) của phương trình

$$(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2y) = 5 + 6i$$

<u>Bài 1.3</u>: Giải hệ phương trình phức $\begin{cases}(1+i)z_1 - z_2 = 2\\ 2iz_1 + (-1+i)z_2 = i\end{cases}$

<u>Bài 1.4</u>: Tìm các số phức z thỏa mãn điều kiện

a) $|z| = z$ b) $\overline{z} = z^2$

<u>Bài 1.5</u>: Viết các số phức sau ở dạng lượng giác và dạng mũ

a) z = -2 b) z = 3i

c) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ d) z=$-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

<u>Bài 1.6</u>: Viết số phức sau ở dạng đại số : $z = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

<u>Bài 1.7</u>: Thực hiện phép tính

a) $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^7$ b) $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{40}$

Chương 2
MA TRẬN – ĐỊNH THỨC

2.1. Khái niệm về ma trận

2.1.1. Định nghĩa

Một ma trận cỡ m×n trên $\mathbb{R}$ là một bảng số hình chữ nhật gồm m hàng và n cột có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

Hoặc

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

với $a_{ij} \in \mathbb{R}$ là phần tử nằm ở hàng i cột j của ma trận A.

Ta gọi:

$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$ là dòng thứ i của ma trận A.

$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ là cột thứ j của ma trận A.

Để chỉ A là ma trận cỡ m×n mà phần tử nằm ở hàng i cột j là a_{ij} người ta còn viết: $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$

Ví dụ 2. 1 $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận cỡ 2x3 có các phần tử là:

$a_{11} = 4; \quad a_{12} = -3; \quad a_{13} = \dfrac{-1}{2};$

$a_{21} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \quad a_{22} = 0; \quad a_{23} = 1$ □

- Nếu m=n thì A (cỡ n×n) gọi là **ma trận vuông cấp n**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Trong ma trận vuông cấp n, đường nối các phần tử a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} được gọi là **đường chéo chính**.

- Nếu m=1 thì ma trận A (cỡ 1×n) (chỉ có một hàng) được gọi là **ma trận hàng**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

- Nếu n=1 thì ma trận A (cỡ m×1) (chỉ có một cột) được gọi là **ma trận cột**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

2.2. Các dạng ma trận

2.2.1. Ma trận không

Ma trận không là ma trận có tất cả các phần tử đều bằng không. Ma trận không thường được ký hiệu là θ.

Ví dụ 2. 2 $\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận không cỡ 3x2

Ta còn viết $0_{3\times 2}$ để chỉ ma trận không ở trên.

Lưu ý: Khi không sợ nhầm lẫn, người ta vẫn viết ma trận không là 0 với cỡ ngầm hiểu sao cho phù hợp với bối cảnh đang xét.

2.2.2. Ma trận tam giác

*Ma trận vuông có các phần tử nằm phía dưới đường chéo chính đều bằng 0 gọi là **ma trận tam giác trên**.*

Ví dụ 2. 3 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ là ma trận tam giác trên cấp 4

*Ma trận vuông có các phần tử nằm phía trên đường chéo chính đều bằng 0 gọi là **ma trận tam giác dưới**.*

Ví dụ 2. 4 $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ là ma trận tam giác dưới cấp 3

2.2.3. Ma trận chéo

*Ma trận vuông có các phần tử ngoài đường chéo chính bằng 0 gọi là ma trận chéo (Hay còn gọi là **ma trận đường chéo**).*

Các ma trận chéo cấp n có dạng:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

2.2.4. Ma trận đơn vị

Ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo chính là 1 được gọi là ma trận đơn vị.

Ký hiện I (Hoặc ký hiệu là I_n trong trường hợp cần thể hiện rõ là ma trận đơn vị cấp n)

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

2.2.5. Ma trận đối xứng

Ma trận vuông $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$*,* a_{ij} *là các số thực, được gọi là ma trận đối xứng nếu* $A^T = A$.

Ví dụ 2. 5 Ma trận sau đây là ma trận đối xứng

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Nhận xét: *Nếu A là ma trận đối xứng thì các phần tử đối xứng nhau qua đường chéo chính bằng nhau và ngược lại, nghĩa là:*

$$A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n} \text{ đối xứng} \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$$

2.3. Phép toán ma trận

2.3.1. Hai ma trận bằng nhau

Hai ma trận được coi là bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng cỡ và các phần tử ở cùng vị trí của chúng bằng nhau.

Nghĩa là với hai ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ và $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ thì

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \ \ \forall i, j} \quad (2.8)$$

Ví dụ 2. 6 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ chỉ khi a=2; b=-1; c=0; d=5 □

2.3.2. Phép chuyển vị ma trận

Ma trận có được từ ma trận A bằng cách xếp các dòng của A thành các cột tương ứng gọi là ma trận chuyển vị của ma trận A, ký hiệu là A^T (Hay A^t)

Vậy, nếu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

thì $$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Thấy ngay: Nếu A cỡ $n\times m$ thì A^T có cỡ là $m\times n$.

Ví dụ 2. 7 Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ có ma trận chuyển vị là

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \square$$

2.3.3. Phép cộng ma trận

Cho hai ma trận cùng cỡ mxn $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ và $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$

Định nghĩa:

Tổng hai ma trận cùng cỡ A và B là một ma trận cùng cỡ $m\times n$ kí hiệu là A+B và được xác định như sau:

$$A+B = \left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Nghĩa là muốn cộng hai ma trận cùng cỡ, ta cộng các phần tử ở cùng vị trí.

Ví dụ 2. 8 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ □

Phép cộng có các tính chất:

Giao hoán: A+B = B+A

Kết hợp: A+(B+C)=(A+B)+C

2.3.4. Phép nhân ma trận với một số

Định nghĩa:

Tích của ma trận A cỡ m×n với một số α là một ma trận cỡ m×n ký hiệu αA và được xác định như sau:

$$\alpha A = \left(\alpha a_{ij}\right)_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Nghĩa là ta nhân số đó với tất cả các phần tử của ma trận.

Ví dụ 2. 9 $k\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 2k \\ -3k & 0 \end{bmatrix}$

Phép nhân ma trận với một số có các tính chất sau:

□ 1.A=A

□ 0.A=θ

□ α(A+B)=αA+αB

□ $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

□ $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$

trong đó α, β là các số, A, B là các ma trận.

Phép trừ ma trận

Hiệu của 2 ma trận A và B cùng cỡ là ma trận ký hiệu A–B được xác định như sau:

$A-B = A+(-1)B$

Ta cũng có thể hiểu là ta đã thực hiện phép trừ các phần tử ở cùng vị trí.

2.3.5. Phép nhân ma trận với ma trận

Định nghĩa:

Tích của ma trận $A=\left(a_{ik}\right)_{m\times p}$ *với ma trận* $B=\left(b_{kj}\right)_{p\times n}$ *là ma trận cỡ m×n ký hiệu là* $A.B=C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ *mà phần tử ở hàng i cột k được tính theo công thức*

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}.b_{kj}\overset{\text{ký hiệu}}{=}\left[a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{ip}\right]\begin{bmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \ldots\\ b_{pj}\end{bmatrix}\qquad(2.11)$$

Nghĩa là để có phần tử đứng ở hàng i cột j trong ma trận tích, ta phải lấy lần lượt từng phần tử đứng ở hàng i trong ma trận A nhân với từng phần tử tương ứng đứng ở cột k trong ma trận B rồi cộng lại.

Ví dụ 2. 10 Cho hai ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận A có 4 cột bằng số hàng ma trận B nên có thể nhân A.B, ma trận A có 2 hàng và ma trận B có 3 cột nên ma trận tích có 2 hàng và 3 cột (cỡ 2×3)

$$A.B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Lấy hàng 1 của ma trận A nhân với cột 1 ma trận B rồi cộng lại ta có phần tử c_{11}:

$c_{11}=2.0+3(-1)+1.4+(-2)1=-1$

Tương tự:

$c_{12}=2.1+3.3+1.0+(-2)(-1)=11;$

$c_{13}=2(-4)+3.2+1(-5)+(-2).1=-9$

$c_{21}=1.0+0(-1)+(-3).4+2.1=-10;$

$c_{22}=1.1+0.3+(-3).0+2(-1)=-1$

$c_{23}=1(-4)+0.2+(-3)(-5)+2.1=13$

Kết quả:

$$A.B = \begin{bmatrix} -1 & 11 & -9 \\ -10 & -1 & 13 \end{bmatrix}$$

Thấy ngay, ta không có tích B.A. □

Nhận xét: Tích của hai ma trận không có tính giao hoán:

A.B ≠ B.A (nếu có)

Ví dụ 2. 11

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 11 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \qquad \square$$

Lưu ý:

- Chỉ khi số cột của ma trận A bằng số hàng ma trận B thì mới được nhân ma trận A với ma trận B.

- Ma trận tích A.B có số hàng bằng số hàng của A và số cột bằng số cột ma trận B.

- Khi A là ma trận vuông, ta dùng ký hiệu A^n để chỉ tích n lần ma trận A.

$$\boxed{A^n = \underbrace{AA...A}_{n}} \tag{2.12}$$

Qui ước: $A^0 = I$.

Đặc biệt, nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ là một ma trận chéo thì

$$A^k = \begin{bmatrix} a_{11}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^k \end{bmatrix} \qquad (2.13)$$

Ví dụ 2. 12

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ khi đó } A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

Một số dạng bài toán thường gặp

Ví dụ 2. 13 Tìm tất cả các ma trận nhân giao hoán với ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Giải:

Giả sử ma trận cần tìm là B. Ta phải có điều sau:

- B nhân được bên trái và bên phải của A. Suy ra B là ma trận cấp 2. Giả sử $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

- AB=BA (*)

Mà AB=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -c & -d \end{bmatrix}$

BA=$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a-b \\ c & 2c-d \end{bmatrix}$

Suy ra (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} a+2c = a \\ b+2d = 2a-b \\ -c = c \\ -d = 2c-d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b = a-d \\ c = 0 \\ d \in \mathbb{R} \end{cases}$

Vậy các ma trận cần tìm có dạng $\begin{bmatrix} a & a-d \\ 0 & d \end{bmatrix}, a, d \in \mathbb{R}$

Ví dụ 2. 14 Tìm ma trận X thỏa $AX = B$ với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Giải:

Nhận thấy ngay X là ma trận cỡ 2x1

Giả sử $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Pt AX=B $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 2 \\ -x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{5} \\ y = \dfrac{3}{5} \end{cases}$

Vậy $X = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$

Ví dụ 2. 15 Cho $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ và $f(x) = x^2 + 3x - 2$. Tính $f(A)$

Giải:

Ta có $f(A) = A^2 + 3A - 2I$

Với $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$

Suy ra $f(A) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 10 & 18 \end{bmatrix}$ □

Phép nhân có các tính chất:

A.(B.C)=(A.B).C (Kết hợp)

A(B+C)=A.B+A.C (Phân phối)

(A+B)C=A.C+B.C

α(A.B)=(αA).B=A(αB) với $\alpha \in R$

A.I=A; I.B=B (I là ma trận đơn vị)

(A.B)T=BT.AT .

Ví dụ 2. 16 $\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

2.4. Phép biến đổi sơ cấp theo hàng của ma trận

Có 3 phép biến đổi ma trận sau được gọi là phép biến đổi sơ cấp theo hàng của ma trận:

S1: Đổi chỗ hai hàng

S2: Nhân một hàng với một số k khác 0

S3: Nhân một hàng với một số k rồi cộng vào hàng khác

Khi thực hiện các phép biến đổi sơ cấp theo hàng đối với ma trận A ta nhận được ma trận B, ta viết $A \rightarrow B$

Nếu ma trận B có được từ ma trận A qua hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng thì ta nói A và B là hai ***ma trận tương đương hàng***.

Ký hiệu A~B.

Ví dụ 2. 17 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{s3:\ -2h1+h2\rightarrow h2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

2.5. Ma trận rút gọn bậc thang (theo hàng)

Định nghĩa: *Ma trận rút gọn bậc thang là ma trận có các tính chất:*

(i) Các hàng bằng 0 (nếu có) nằm dưới các hàng khác 0.

(ii) Dưới phần tử khác 0 đầu tiên (tính từ bên trái) của mỗi dòng khác 0 là các phần tử 0.

Ghi chú:

- ☐ Dòng khác 0 là dòng có ít nhất một phần tử khác 0
- ☐ Để ngắn gọn, người ta thường nói "ma trận bậc thang" thay cho "ma trận rút gọn bậc thang".

Ví dụ 2. 18

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ là ma trận bậc thang.

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ không là ma trận bậc thang.

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ là ma trận bậc thang. □

Ví dụ 2. 19 Tìm ma trận bậc thang tương đương hàng với ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Giải:

$$A \xrightarrow[]{\substack{-2h1+h2\to h2 \\ -3h1+h3\to h3 \\ -4h1+h4\to h4}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & -6 & -7 & -11 \\ 0 & -9 & -12 & -19 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\substack{-2h2+h3\to h3 \\ -3h2+h4\to h4}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-h3+h4\to h4}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -3 & -5 & -8\\ 0 & 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Vậy

$$A\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -3 & -5 & -8\\ 0 & 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ □

2.6. Định thức

2.6.1. Định nghĩa định thức cấp n

Định thức của một ma trận vuông $A=\left(a_{ij}\right)$ *cấp n (gọi tắt là định thức cấp n) là một số, ký hiệu là* $|A|$ *hoặc det(A), có được bằng cách qui nạp như sau:*

□ *Nếu n=1 thì det(A)=*a_{11}.

□ *Nếu n=2 thì ta có định thức cấp 2:*

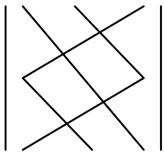
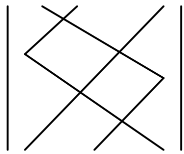
$$\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

□ *Nếu n=3 thì ta có định thức cấp 3*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{23}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Ta thấy dấu (+) và dấu (–) được gán cho các tích theo sơ đồ sau:

(+)  (–) 

Qui tắc tính định thức cấp 3 như trên gọi là **qui tắc Sa-rút**.

Tổng quát, giả sử định thức của các ma trận vuông cấp n–1 đã được định nghĩa. Ta gọi ma trận con A_{ij} của ma trận A(cấp n) ứng với phần tử a_{ij} là ma trận có từ ma trận A bằng cách bỏ đi hàng i, cột j (A_{ij} là ma trận vuông cấp n–1),

Ký hiệu $M_{ij} = \det\left(A_{ij}\right)$

Ta định nghĩa định thức của ma trận A như sau:

$$\det(A) = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n}M_{1n} \qquad (2.14)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k}M_{1k}$$

Công thức trên được gọi là công thức tính định thức bằng cách khai triển theo hàng 1.

Trong công thức trên $(-1)^{i+j} M_{ij}$ gọi là ***phần bù đại số*** của phần tử đứng ở hàng i cột j trong định thức của A.

Chẳng hạn, ta có thể tính đính thức cấp 3 bằng cách khai triển theo hàng 1 như sau:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ví dụ 2. 20

Cho định thức: $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$. Phần bù đại số của các phần tử thuộc hàng thứ nhất của $|A|$ là:

$$\overline{a}_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10;$$

$$\overline{a}_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\overline{a}_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -13 \quad \square$$

Ví dụ 2. 21

a). $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = ay - bx$

b). $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1(-4) - (-2)3 = 2$

c). $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= +(-1)(-5).1 + 2(-6).3 + 3.4(-2) - 3(-5).3 - 2.4.1 - (-1)(-6)(-2)$$

$$= -6$$

d). Tính $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

Giải:

Áp dụng công thức tính định thức bằng cách khai triển theo hàng 1 ta được:

$$\det(A) = 1.\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 16$$

Trong định nghĩa trên, ta có công thức tính định thức bằng cách khai triển theo dòng 1. Tuy nhiên, người ta chứng minh được rằng các dòng cũng như các cột khác của ma trận đều có vai trò tương tự như dòng 1. Cụ thể ta có định lý sau:

2.6.2. Định lý Laplace khai triển định thức

Định lý:

Định thức của ma trận vuông A cấp n được tính theo công thức sau:

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2}M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in}M_{in} \quad (2.15)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}M_{ik}$$

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j}M_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j}M_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj}M_{nj} \quad (2.16)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj}M_{kj}$$

Công thức (2.15) được gọi là công thức khai triển theo hàng i.

Công thức (2.16) được gọi là công thức khai triển theo cột j.

Ví dụ 2. 22 Tính $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

Giải:

Ap dụng công thức khai triển theo hàng 3 ta có:

$$\det(A) = (-2)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{3+2}M_{32} + 0.(-1)^{3+3}M_{33} + 0.(-1)^{3+4}M_{34}$$

$$= (-2)(-8) = 16 \quad \square$$

Nhận xét: Nếu chọn hàng hoặc cột khai triển có nhiều số 0 thì việc tính định thức sẽ đơn giản.

2.6.3. Các tính chất cơ bản của định thức

Tính chất 1: *Định thức của một ma trận vuông cấp n bằng định thức của ma trận chuyển vị của nó*

$$|A| = |A^T| \tag{2.17}$$

Hệ quả 1: *Những tính chất nào của định thức đúng với hàng thì cũng đúng với cột và ngược lại tính chất nào đúng với cột thì cũng đúng với hàng.*

Tính chất 2: *Khi nhân một hàng (một cột) của định thức với một số k thì cả định thức được nhân lên số k đó.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.18}$$

Ví dụ 2. 23 Khi tính định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ta thấy hàng 2 có thừa số chung là $\frac{1}{2}$ thì ta có thể đưa ra ngoài dấu định thức: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ □

Hệ quả 2: *Nếu tất cả các phần tử của một hàng (cột) nào đó trong định thức đều bằng không thì định thức bằng không (vì ta có thể coi 0 là thừa số chung và đưa ra ngoài).*

Ví dụ 2. 24

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0 & 2 & -2 \\ 0.0 & 1 & 3 \\ 0.0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0.\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \square$$

Tính chất 3: *Nếu trong định thức ta đổi chỗ 2 hàng (2 cột) còn các hàng (cột) khác giữ nguyên vị trí thì định thức đổi dấu.*

Ví dụ 2. 25

$$\text{Vì } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -33 \text{ cho nên } \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 33$$

(đổi chỗ hàng 1 và hàng 2, hàng 3 giữ nguyên)

Hệ quả 3: *Nếu định thức có hai hàng (hoặc hai cột) bằng nhau thì định thức bằng 0.*

Ví dụ 2. 26

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \text{ (đổi chỗ cột 1 và cột 3).}$$

Nhưng vì hai cột này như nhau nên

$$|A| = -|A| \Leftrightarrow |A| = 0 \quad \square$$

Hệ quả 4: *Nếu định thức có 2 hàng (2 cột) tỷ lệ thì định thức bằng 0. Vì khi đưa hệ số tỷ lệ ra ngoài thì còn hai hàng (2 cột) bằng nhau.*

Tính chất 4: *Nếu trong định thức:*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

có cột C_j bằng tổng của hai cột C_j' và C_j'', hay:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{1j} \\ a'_{2j} \\ \dots \\ a'_{nj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a''_{1j} \\ a''_{2j} \\ \dots \\ a''_{nj} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Khi đó: $|A| = |A_1| + |A_2|$

trong đó $|A_1|$ là định thức thu được từ $|A|$ bằng cách thay cột C_j bằng cột C_j' còn các cột khác giữ nguyên:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a'_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a'_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a'_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Tương tự $|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a''_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a''_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a''_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Ví dụ 2. 27 Tính định thức $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

Giải:

Tách cột 1 thành $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ thì ta có

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

=2(2.7+4.4)=60 □

Hệ quả 5: *Trong một định thức, nếu ta nhân 1 hàng (1 cột) với 1 số k rồi cộng vào hàng (cột) khác thì định thức không đổi.*

Ví dụ 2. 28 Tính $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

Giải:

Ta có $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{-3h_1+h_2\to h_2 \\ -2h_1+h_3\to h_3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Khai triển Laplace theo cột 1:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5 \quad \square$$

2.6.4. Các phương pháp tính định thức

Phương pháp hạ bậc

Từ các tính chất của định thức, ta có 3 phép biến đổi chính như sau:

Phép biến đổi	Giá trị định thức
Đổi chỗ 2 hàng (2 cột)	Định thức đổi dấu
Nhân k với 1 hàng (1 cột)	Định thức nhân k
Cộng k lần hàng (cột) r vào hàng (cột) s	Định thức không đổi

Từ ví dụ 2.28 ta có cách tính định thức như sau:

Ap dụng các tính chất của định thức biến đổi định thức về dạng trong một cột (hoặc một hàng) nào đó chỉ có một phần tử khác 0 (còn các phần tử khác đều bằng 0). Sau đó khai triển Laplace theo cột (hàng) đó. Thường người ta hay biến đổi cột một như ví dụ sau:

Ví dụ 2. 29 Tính $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

Giải:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \overset{h_1 \leftrightarrow h_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{-3h_1+h_2 \to h_2 \\ -2h_1+h_3 \to h_3}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}$$

=5 □

Như vậy, thay vì phải tính định thức cấp 3 ta hạ được một bậc, chỉ còn tính định thức cấp 2.

Phương pháp tam giác

Nếu định thức của ma trận có dạng tam giác trên

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

thì khi tính, ta áp dụng liên tiếp khai triển Laplace theo cột một sẽ được:

$$|A| = a_{11}a_{22}...a_{nn}\,.$$

Nghĩa là: Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử trên đường chéo chính.

Trường hợp định thức của ma trận tam giác dưới ta được kết quả tương tự nếu khai triển liếp tiếp theo hàng 1.

Để tính các định thức cấp cao người ta hay dùng các tính chất của định thức để biến đổi định thức đưa về dạng tam giác rồi lấy tích các phần tử trên đường chéo chính.

Ví dụ 2. 30 Tính định thức cấp n $|A| = \begin{vmatrix} x & a & a & ... & a \\ a & x & a & ... & a \\ a & a & x & ... & a \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a & a & a & ... & x \end{vmatrix}$

Theo hệ quả 5: Nhân hàng 1 với (-1) rồi cộng vào các hàng khác, ta có:

$$|A| = \begin{vmatrix} x & a & a & ... & a \\ a-x & x-a & 0 & ... & 0 \\ a-x & 0 & x-a & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a-x & 0 & 0 & ... & x-a \end{vmatrix}$$

cộng cột 2, 3, …, n vào cột 1 ta có:

$$|A| = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & ... & a \\ 0 & x-a & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & x-a & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & x-a \end{vmatrix}$$

và dùng cách tính định thức dạng tam giác ta có kết quả:

$$|A| = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1} \quad \square$$

2.7. Hạng của ma trận

Cho A là ma trận cỡ m×n và p là một số nguyên dương, p ≤ min(m,n).

2.7.1. Định nghĩa (Định thức con)

Ma trận vuông có p hàng, p cột thu được từ A bằng cách bỏ đi (m-p) hàng bất kỳ, bỏ đi (n-p) cột bất kỳ được gọi là ma trận con cấp p của A.

Định thức của ma trận con đó được gọi là định thức con cấp p của A.

Ví dụ 2. 31 Xét ma trận cỡ 3x4 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

Bỏ đi (3-3)=0 hàng, bỏ đi (4-3)=1 cột (lần lượt là các cột 1, 2, 3, 4) ta được 4 định thức con cấp 3 của A là:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Bỏ đi hàng cuối và bỏ đi 2 cột cuối ta được định thức con cấp 2 của A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

Có thể bỏ đi hàng khác, hai cột khác ta sẽ được nhiều định thức con cấp 2 khác của A. □

2.7.2. Định nghĩa (Hạng của ma trận)

Cấp cao nhất của định thức con khác không của A được gọi là hạng của ma trận A. Ký hiệu r(A).

Ví dụ 2. 32 Tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

Giải:

Theo ví dụ trên, ma trận A có mọi định thức con cấp 3 đều bằng 0, và có ít nhất một định thức con cấp 2 khác 0 nên ta có r(A)=2. □

2.7.3. Tính hạng ma trận

Có hai cách tính hạng của ma trận:

Theo định nghĩa

Tính các định thức con khác 0 (thường bắt đầu từ góc trên bên trái). Cấp cao nhất của các định thức con khác 0 là hạng ma trận.

Nhận xét: Người ta thường không sử dụng cách này vì đôi khi phải tính khá nhiều định thức con.

Dùng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng của ma trận

Dựa vào các tính chất của định thức, ta thấy ngay việc thực hiện các phép biến đổi sơ cấp theo hàng của ma trận sẽ làm cho các định thức con của ma trận A đang xét thay đổi bằng bội k khác 0 của chúng nên ta có định lý sau:

Định lý

Các phép biến đổi sơ cấp theo hàng của ma trận không làm thay đổi hạng của ma trận.

Hạng của ma trận bậc thang bằng số hàng khác không của nó.

Vậy ta có qui tắc tìm hạng ma trận như sau: *Dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa ma trận về dạng bậc thang rồi đếm số hàng khác 0 (hàng khác 0 là hàng có ít nhất một phần tử khác 0), số đếm được sẽ là hạng ma trận.*

Ví dụ 2. 33

Tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

Ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_1+h_3 \to h_3]{2h_1+h_2 \to h_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-h_2+h_3 \to h_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận bậc thang tương đương hàng với A có 2 hàng khác 0, vậy

$$r(A) = 2 \quad \square$$

Ví dụ 2. 34 Tính hạng ma trận sau theo m

$$A = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{bmatrix}$$

Giải:

Đưa A về dạng bậc thang:

$$A \xrightarrow{h1 \leftrightarrow h3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-m.h1+h3 \to h3]{-h1+h2 \to h2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m^3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h2+h3 \to h3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1+m-m^2-m^3 \end{bmatrix}$$

$= A'$

Xét phần tử $a_{33} = 2-m-m^2 = 0 \Leftrightarrow m=1 \vee m=-2$

Khi m ≠ -2 và m ≠ 1 thì $A \sim A'$ có 3 hàng khác 0 nên r(A)=3

Khi m=-2, thì $A \sim A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Vậy r(A)=3.

Khi m=1, ta có $A \sim A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nên r(A)=1 □

2.8. Ma trận nghịch đảo

2.8.1. Định nghĩa

Cho A là ma trận vuông cấp n. Ma trận nghịch đảo của ma trận A (nếu có) sẽ là một ma trận cấp n ký hiệu A^{-1} thỏa mãn:

$$A.A^{-1} = A^{-1}A = I \qquad (2.20)$$

(I là ma trận đơn vị cấp n)

Nếu A có ma trận nghịch đảo thì A gọi là ma trận khả nghịch.

Ví dụ 2. 35 Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ có ma trận nghịch đảo là

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Vì $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.8.2. Điều kiện tồn tại ma trận nghịch đảo và cách tìm

Định lý:

Ma trận vuông cấp n $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ *có ma trận nghịch đảo khi và chỉ khi det(A)* $\neq 0$

và công thức xác định A^{-1} *là:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T \qquad (2.21)$$

trong đó

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

với c_{ij} *là phần bù đại số của phần tử* a_{ij} *trong ma trận A.*

Tức là $\qquad c_{ij} = (-1)^{i+j} \left|A_{ij}\right|$

Ví dụ 2. 36 Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Giải:

Ta có det(A)=60 $\neq 0 \Rightarrow$ A là ma trận khả nghịch.

Tính các phần bù đại số:

$$c_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=3;\ c_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ -3 & -1\end{vmatrix}=10;\ c_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -3 & 2\end{vmatrix}=11$$

$$c_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=9;\ c_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 4\\ -3 & -1\end{vmatrix}=10;\ c_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -3 & 2\end{vmatrix}=-7$$

$$c_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & -3\end{vmatrix}=-15;\ c_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -3\end{vmatrix}=10;\ c_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=5$$

Vậy ma trận nghịch đảo của ma trận A là:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}c_{11} & c_{21} & c_{31}\\ c_{12} & c_{22} & c_{32}\\ c_{13} & c_{23} & c_{33}\end{bmatrix}=\frac{1}{60}\begin{bmatrix}3 & 9 & -15\\ 10 & 10 & 10\\ 11 & -7 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{20} & \frac{3}{20} & -\frac{5}{20}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{11}{60} & -\frac{7}{60} & \frac{5}{60}\end{bmatrix}$$

Để ý: Nếu A.B=I thì A và B là các ma trận khả đảo và ma trận này là ma trận nghịch đảo của ma trận kia.

Phương pháp Gauss tìm ma trận nghịch đảo

Giả sử cần tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A.

Thuật toán

Bước 1: Lập ma trận gồm nửa trái là ma trận A, nửa phải là ma trận đơn vị: $\left[A|I\right]$

Bước 2: Dùng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng đưa ma trận A về ma trận có dạng đơn vị, các phần tử trên cùng hàng của ma trận bên phải mặc nhiên biến đổi theo.

Bước 3: Kết luận, khi ma trận bên trái có dạng ma trận đơn vị thì ma trận bên phải sẽ là ma trận nghịch đảo của A.

Tóm lại: Ta sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng của ma trận để tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A theo sơ đồ sau:

$$\left[A|I\right] \longrightarrow \left[I|A^{-1}\right]$$

Ghi chú: Ta sẽ giải thích tại sao có phương pháp tìm ma trận nghịch đảo như trên (Phương pháp Gauss) sau khi nghiên cứu về **hệ phương trình tuyến tính**.

Ví dụ 2. 37 Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Giải:

Bước 1: Lập ma trận dạng $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Bước 2: Biến đổi đưa nửa phần ma trận A về dạng đơn vị.

Đổi chỗ hàng 1 với hàng 3 được

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{\substack{h_2-3h_1\to h_2 \\ h_3-2h_1\to h_3}}{=} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] h_3(-1)\to h_3$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \overset{\substack{h_1-h_3\to h_1 \\ h_2+3h_3\to h_2}}{=} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Bước 3: Nửa bên trái là ma trận A có dạng đơn vị, nửa bên phải sẽ là ma trận nghịch đảo của ma trận A:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Lưu ý: Luôn nhớ phải kiểm tra lại ma trận nghịch đảo tìm được bằng cách kiểm tra lại công thức: $AA^{-1} = I$

2.8.3. Tính chất ma trận nghịch đảo

$(A^{-1})^{-1} = A$

Nếu A, B đều khả nghịch và cùng cấp thì:

$(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

BÀI TẬP

Bài 2.1 Thực hiện các phép toán ma trận.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \\ 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 11 & 5 \\ -7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tính (2A + 3B)C.

f) A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$. Tính f(A)

g) Tính $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, $a \in R$ và n $\in$ N.

Bài 2.2

a) Tìm các số x, y, z, w nếu:

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$$

b) Tìm tất cả các ma trận thực cấp 2 nhân giao hoán với ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bài 2.3 Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Tính (AB)C , $C^T B^T A^T$.

b) Tính f(A) biết $f(x) = 2x^2 + 3x + 5 - \dfrac{2}{x}$.

Bài 2.4 Tìm ma trận X trong các trường hợp sau:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $X.\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.X - X.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ X - $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Bài 2.5</u> Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$; **e)** $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a' & a & a' \\ b & b & b' & b' \\ ab & a'b & ab' & a'b' \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & .... & n-1 & n \\ 1 & 0 & 3 & .... & n-1 & n \\ 1 & 2 & 0 & .... & n-1 & n \\ \multicolumn{6}{c}{.......................................} \\ 1 & 2 & 3 & .... & 0 & n \\ 1 & 2 & 3 & .... & n-1 & 0 \end{vmatrix}$

Bài 2.6 Giải các phương trình, bất phương trình sau:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$

d) $\begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$

Bài 2.7 Tìm hạng các ma trận sau:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Bài 2.8

a) Cho A = $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 3 \\ 1 & 2m & 1 & 4 \\ m & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Định m để r(A) = 2.

b) Cho A = $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 & m^2 \end{pmatrix}$. Định m để r(A) < 3.

c) Cho A = $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & m & 4 \end{pmatrix}$. Định m để r(A) = 3.

Bài 2.9 Tìm hạng ma trận sau (biện luận theo m):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & m & 12 \end{pmatrix}$$

Bài 2.10 Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} bằng phương pháp Gauss- Jordan.

Bài 2.11 Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} bằng cách *sử dụng định thức.*

Chương 3
HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Hệ phương trình tuyến tính là một kiến thức toán học có ứng dụng trong hầu hết các ngành học kỹ thuật.

Học xong chương này sinh viên phải nắm được phương pháp và giải được các hệ phương trình tuyến tính tổng quát, biết cách giải trong trường hợp hệ có tham số.

3.1. Khái niệm

- *Hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình n ẩn số là hệ có dạng:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó: x_j (j = 1, 2, ..., n) là các ẩn số.

a_{ij} $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ là hệ số của ẩn x_j trong phương trình thứ i.

b_i $(i = \overline{1,m})$ là hệ số tự do của phương trình thứ i.

- **Nghiệm hệ phương trình tuyến tính**

Một bộ số ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$) được gọi là nghiệm của hệ phương trình nếu khi ta thay $x_1=\alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., $x_n=\alpha_n$ vào hệ thì ta thấy tất cả m đẳng thức đều thỏa mãn.

Ví dụ 3. 1 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 36 \\ 2x_1 + 4x_2 = 100 \end{cases}$ là hệ phương trình tuyến tính gồm 2 phương trình 2 ẩn số. Hệ này có nghiệm là (22, 14) vì khi thay $x_1 = 22, x_2 = 14$ vào hệ ta thấy các hệ thức đều thỏa mãn.

□ **Phép biến đổi tương đương**

Phép biến đổi tương đương là các phép biến đổi hệ phương trình mà không làm thay đổi tập nghiệm của hệ phương trình.

Ta có 3 phép biến đổi tương đương thường gặp như sau:

B1: Đổi chỗ hai phương trình

B2: Nhân hai vế của một phương trình với một số k ≠0

B3: Nhân 2 vế của một phương trình với số k rồi cộng vào phương trình khác.

□ **Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính**

Lấy các hệ số của ẩn xếp thành ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Lấy các ẩn lập ma trận cột: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$

Lấy các hệ số tự do lập ma trận cột: $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$

A được gọi là **ma trận hệ số** của hệ (1).

x được gọi là ma trận ẩn số

B được gọi là ma trận cột hệ số tự do

Ap dụng các phép toán ma trận, ta có thể viết hệ phương trình tuyến tính ở dạng:

$$Ax = B \tag{3.2}$$

gọi là dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính.

Ngoài ra, ta có thể lập **ma trận hệ số bổ sung** (Hay **ma trận mở rộng**) của hệ, ký hiệu là $\overline{A}$ hoặc (A,B)

$$\overline{A} = (A, B) = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{3.3}$$

Ví dụ 3. 2 $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$

Hệ trên có ma trận hệ số là $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$, có ma trận hệ số bổ sung là: $\overline{A}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 6\\ 1 & -1 & 5\end{bmatrix}$

Lưu ý:

- Mỗi hệ phương trình tuyến tính có tương ứng duy nhất một ma trận hệ số bổ sung.

- Các phép biến đổi tương đương một hệ phương trình tuyến tính B1, B2, B3 tương đương với các phép biến đổi sơ cấp S1, S2, S3 theo hàng của ma trận hệ số bổ sung của hệ. Do đó thay vì biến đổi tương đương hệ phương trình, ta có thể biến đổi ma trận hệ số bổ sung của hệ theo hàng.

Chẳng hạn, theo dõi sự thay đổi khi thực hiện phép biến đổi tương đương của hệ phương trình với sự thay đổi tương ứng của ma trận hệ số bổ sung của hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{cases}3x+2y=6\\ x-\ y=5\end{cases}$$

Biến đổi hệ	Biến đổi ma trận	Ghi chú
$\begin{cases}3x+2y=6\\ x-\ y=5\end{cases}$	$\overline{A}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 6\\ 1 & -1 & 5\end{bmatrix}$	
$\begin{cases}x-\ y=5\\ 3x+2y=6\end{cases}$	$\begin{bmatrix}1 & -1 & 5\\ 3 & 2 & 6\end{bmatrix}$	Đổi chỗ hai phương trình

$\begin{cases} x - y = 5 \\ 5y = -9 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -9 \end{bmatrix}$	Nhân phương trình trên với -3 và cộng xuống phương trình dưới

□ **Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất**

Nếu B=0 thì hệ phương trình $Ax = 0$ gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Ví dụ 3. 3 Hệ phương trình tuyến tính sau là hệ thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

3.2. Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

3.2.1. Phương pháp Gauss Jordan

Định lý Cronecker-Capelli

Điều kiện cần và đủ để một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm là hạng ma trận hệ số của hệ bằng hạng ma trận hệ số bổ sung của hệ:

$$r(A) = r(\overline{A}) \tag{3.4}$$

Phương pháp Gauss- Jordan:

Xét hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ \quad\ \ 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

Thấy ngay hệ phương trình tuyến tính trên giải dễ dàng: từ phương trình thứ hai, ta rút x_2 theo x_3 (hoặc ngược lại) rồi từ đó thay ngược lên phương trình thứ nhất để tìm x_1.

Bên cạnh đó, nếu nhìn ma trận hệ số bổ sung của hệ trên thì ta thấy nó chính là ma trận có dạng rút gọn bậc thang:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Ý tưởng của phương pháp Gauss Jordan là dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng của ma trận đưa ma trận hệ số bổ sung về dạng bậc thang. Khi đó, hệ phương trình đã cho tương đương với hệ bậc thang. Hệ bậc thang này giải dễ dàng từ dưới lên.

Sơ đồ giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss Jordan như sau:

$\left[A|B\right] \xrightarrow[\text{theo hang cua ma tran}]{\text{cac phep bien doi so cap}} \left[A'|B'\right]$: Dạng bậc thang.

Khi đó $\qquad Ax = B \Leftrightarrow A'x = B'$

trong đó $A'x = B'$ là hệ dạng bậc thang nên giải dễ dàng.

Sinh viên tìm hiểu thêm phương pháp này qua ví dụ sau:

Ví dụ 3. 4 Giải hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} 2x_1 & -2x_2 & +4x_3 & +4x_4 & +6x_5 & =5 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +5x_5 & =5 \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +x_4 & +2x_5 & =3 \\ 2x_1 & -3x_2 & +5x_3 & +4x_4 & +7x_5 & =8 \end{cases}$$

Giải:

Lập ma trận hệ số bổ sung của hệ

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -2 & 4 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 4 & 7 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{h1 \leftrightarrow h2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 4 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_4+(-2)h_1 \to h_4]{\substack{h_2+(-2)h_1 \to h_2 \\ h_3+(-1)h_1 \to h_3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h2 \leftrightarrow h3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_4+(-1)h_2 \to h_4]{(-1)h_3 \to h_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Thấy ngay $r(A) = r(\overline{A})$ nên hệ có nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 5 \ (1) \\ \quad - x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -2 (2) \\ \qquad\qquad 2x_4 + 4x_5 = 5 \quad (3) \end{cases}$$

Hệ có dạng hình thang, ta chuyển x_3, x_5 qua vế phải làm ẩn tự do:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 = 5 - 2x_3 - 5x_5 \\ \quad - x_2 - 2x_4 = -2 - x_3 + 3x_5 \\ \qquad 2x_4 = 5 - 4x_5 \end{cases}$$

Từ (3) rút được $x_4 = \dfrac{5 - 4x_5}{2}$, thay vào (2) ta được:

$$x_2 = -3 + x_3 + x_5$$

Thay x_4, x_2 vào (1) ta được $x_1 = \dfrac{-11 - 2x_3 + 4x_5}{2}$

Vậy nghiệm hệ phương trình là $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-11 - 2x_3 + 4x_5}{2} \\ x_2 = -3 + x_3 + x_5 \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 = \dfrac{5 - 4x_5}{2} \\ x_5 \in \mathbb{R} \end{cases}$

Trường hợp sau khi biến đổi, số phương trình còn lại bằng số ẩn số.

Ma trận hệ số bổ sung của hệ có dạng:

$$\overline{A} = (A, B) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \qquad (3.5)$$

với $a_{ii} \neq 0$ ta lại có thể dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa phần ma trận hệ số của hệ về dạng ma trận đơn vị:

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_n \end{bmatrix} \qquad (3.6)$$

Khi đó hệ tương ứng có nghiệm: $\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_2 \\ \dots \\ x_n = \alpha_n \end{cases}$ (nghiệm duy nhất)

Ví dụ 3. 5 Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Giải:

Lập ma trận hệ số bổ sung rồi biến đổi

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\3&1&0&0\\2&0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[-2h_1+h_3\to h_3]{-3h_1+h_2\to h_2}\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-3&-3\\0&0&-1&-2\end{bmatrix}$$

Ma trận này có dạng hình thang, số phương trình bằng số ẩn số bằng 3.

Ta biến đổi tiếp: nhân hàng 3 với (-1) được

$$\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-3&-3\\0&0&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[3h_3+h_2\to h_2]{-h_3+h_1\to h_1}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&3\\0&0&1&2\end{bmatrix}$$

Vậy hệ có nghiệm: $\begin{cases}x_1=-1\\x_2=3\\x_3=2\end{cases}$

Nhận xét: Qua các ví dụ trên ta thấy:

Nếu $r(A)=r(\overline{A})=$ *số ẩn của hệ thì hệ phương trình tuyến tính có nghiệm duy nhất.*

$r(A)=r(\overline{A})<$ *số ẩn của hệ thì hệ phương trình tuyến tính có vô số nghiệm.*

$r(A)\neq r(\overline{A})$ *thì hệ phương trình tuyến tính đã cho vô nghiệm.*

Qua việc giải hệ phương trình tuyết tính bằng phương pháp Gauss ở trên, ta thấy rằng thực chất của việc tìm ma trận nghịch đảo bằng cách biến đổi (Phương pháp Gauss) là việc giải cùng một lúc nhiều hệ phương trình tuyến tính. Chẳng hạn, giả sử cần tìm ma trận nghịch đảo của ma trận cấp 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Gọi ma trận nghịch đảo phải tìm là ma trận ẩn X chưa biết:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

Để tìm X, ta phải giải phương trình ma trận A.X = I hay

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.7)$$

Phương trình ma trận này tương đương với 3 hệ phương trình tuyến tính có cùng ma trận hệ số của hệ là A. Ta có thể giải đồng thời cả 3 hệ một lúc theo phương pháp Gauss. Khi đưa ma trận hệ số về dạng ma trận đơn vị thì ma trận nghịch đảo cần tìm chính là ma trận có được sau khi biến đổi ở vế phải.

3.2.2. Phương pháp Cramer

a. Hệ Cramer:

Hệ phương trình tuyến tính được gọi là hệ Cramer nếu có số phương trình bằng số ẩn số và định thức ma trận hệ số của hệ khác không.

Ví dụ 3. 6 Hệ $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + y = 5 \end{cases}$ là hệ Cramer vì có định thức ma trận hệ số của hệ là $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

b. Quy tắc Cramer

Hệ Cramer có nghiệm duy nhất được tính theo công thức:

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} \quad j = 1, 2, ..., n \tag{3.8}$$

trong đó $|A_j|$ *là định thức thu được từ định thức* $|A|$ *bằng cách thay cột thứ j của* $|A|$ *bằng cột hệ số tự do* $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{b}_1 \\ ... \\ \mathrm{b}_\mathrm{n} \end{bmatrix}$*, các cột khác giữ nguyên.*

Ví dụ 3. 7 Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} -2x + y - 3z = 1 \\ 3x - 4y + 2z = 3 \\ 5x + 2y + z = -2 \end{cases}$$

Giải:

Ta có định thức ma trận hệ số của hệ:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -55 \neq 0$$

nên hệ phương trình tuyến tính đã cho là hệ Cramer.

Thay cột tự do vào cột 1 của $|A|$ được:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -9,$$

tương tự ta có

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 56; \qquad |A_3| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 43$$

Theo quy tắc Cramer, nghiệm duy nhất của hệ đã cho là:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{-9}{-55} = \dfrac{9}{55} \\ x_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|} = -\dfrac{56}{55} \\ x_3 = \dfrac{|A_3|}{|A|} = -\dfrac{43}{55} \end{cases} \qquad \square$$

Để ý, trong quá trình giải và biện luận một hệ phương trình tuyến tính, khi xảy ra trường hợp $|A| = |A_1| = |A_2| = |A_3| = 0$, ta ***không có kết luận "Hệ vô số nghiệm"***, để có kết luận chính xác thì ta phải giải hệ bằng phương pháp Gauss. Còn nếu xảy ra trường hợp $|A| = 0$ và có ít nhất một $|A_i| \neq 0$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 3. 8 Xét hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x - 2y + z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Hệ trên có $|A| = |A_1| = |A_2| = |A_3| = 0$ (Do các định thức luôn có hàng 1 và hàng 3 giống nhau).

Để kết luận về nghiệm, ta biến đổi đưa ma trận bổ sung về dạng bậc thang (tức là đưa hệ trên về dạng bậc thang):

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow r(A) \neq r(\overline{A})$

$\Rightarrow$ Hệ vô nghiệm. □

Ví dụ 3. 9 Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Giải:

Các định thức cần tính:

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 - 3m + 2 = (m+2)(m-1)^2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix} = -m^3 + m^2 + m - 1 = -(m+1)(m-1)^2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m^2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$$

$$D_z = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m^2 \end{vmatrix} = m^4 - 2m^2 + 1 = (m+1)^2(m-1)^2$$

Biện luận: Thấy ngay D=0 $\Leftrightarrow m = 1 \vee m = -2$, vậy

- Nếu $m \neq 1 \wedge m \neq -2$ thì hệ là hệ Crame có nghiệm duy nhất là

$$\left(-\frac{m+1}{m+2},\frac{1}{m+2},\frac{(m+1)^2}{m+2}\right)$$

- ☐ Nếu m=1 thì hệ phương trình đã cho trở thành: $x+y+z=1$ nên hệ có vô số nghiệm dạng: $(x,y,1-x-y)$, x,y tùy ý.
- ☐ Nếu m=–2 thì hệ phương trình đã cho có D=0, $D_x \neq 0$. Do đó hệ vô nghiệm.

3.3. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Ta đã biết hệ phương trình tuyến tính thuần nhất m phương trình, n ẩn số có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Dễ thấy hệ phương trình luôn có nghiệm $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, nghiệm này gọi là ***nghiệm tầm thường***. Như vậy, với một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất bất kỳ, hệ luôn có nghiệm. Điều này cũng có nghĩa là hệ có **nghiệm không tầm thường** (nghiệm khác không) khi và chỉ khi hệ có vô số nghiệm.

Từ nhận xét rút ra từ định lý Cronecker-Capelli, ta có thể thấy ngay định lý sau:

3.3.1. Định lý

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi ma trận của hệ có hạng nhỏ hơn số ẩn số:

$$r(A) = r < n. \quad (3.9)$$

Hệ quả:

Nếu hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có số phương trình bằng số ẩn số thì hệ sẽ có nghiệm không tầm thường khi định thức ma trận hệ số của hệ bằng 0.

Ví dụ 3. 10 Tìm m để hệ phương trình thuần nhất sau chỉ có nghiệm tầm thường

$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$$

Giải:

Vì hệ đã cho là hệ vuông nên hệ chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

3.3.2. Hệ nghiệm cơ bản

Giả sử hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $Ax = 0$ có nghiệm không tầm thường, thấy ngay tập nghiệm của hệ có (n-r) ẩn tự do (n là số ẩn trong phương trình, còn r=r(A)).

Giả sử ta chọn một ẩn tự do nào đó là 1 và (n-r-1) ẩn tự do còn lại là 0, sau đó thế vào giải được r ẩn khác thì ta được một nghiệm cụ thể. Bằng cách gán lần lượt các ẩn tự do giá trị 1, còn các ẩn tự do còn lại chọn bằng 0, ta tìm được một tập nghiệm gồm (n-r) nghiệm, tập nghiệm đó gọi là hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Ví dụ 3. 11 Tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

$$\{x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$

Giải:

Thấy ngay dạng nghiệm tổng quát của hệ là

$\left(x_1, x_2, x_3, -x_1 - x_2 + 2x_3\right)$, x_1, x_2, x_3 tùy ý.

Cho $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0$, ta được nghiệm $(1,0,0,-1)$

Cho $x_2 = 1, x_1 = x_3 = 0$, ta được nghiệm $(0,1,0,-1)$

Cho $x_3 = 1, x_1 = x_2 = 0$, ta được nghiệm $(0,0,1,2)$

Vậy hệ nghiệm cơ bản của hệ là:

$$\{(1,0,0,-1),\ (0,1,0,-1),\ (0,0,1,2)\}$$

Ví dụ 3. 12 Tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Giải:

Biến đổi tương đương ta có

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ \quad - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ \quad - 3x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ \quad - 3x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là $\left(-\frac{5}{3}x_3, \frac{7}{3}x_3, x_3\right)$

Suy ra hệ nghiệm cơ bản của hệ là $\left\{\left(-\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 1\right)\right\}$

BÀI TẬP

Bài 3.1: Giải các hệ phương trình sau đây:

a) $\begin{cases} x & +2y & +3z & = & -1 \\ x & +y & +z & = & 1 \\ x & +4y & +9z & = & 9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x & -y & +2z & = & 1 \\ 2x & +y & +2z & = & 1 \\ x & -3y & +4z & = & 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} -x & +3y & -3z & = & 11 \\ 4x & -5y & -z & = & 5 \\ 3x & +2y & +3z & = & 15 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

Bài 3.2: Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x & +y & -3z & = & 1 \\ 2x & +y & +mz & = & 3 \\ x & +my & +3z & = & 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x & -y & +3z & = & 1 \\ x & +y & +z & = & 2m \\ x & -3y & & = & m \end{cases}$

c) $\begin{cases} mx & +y & +z & = & 1 \\ x & +my & +z & = & m \\ x & +y & +mz & = & m^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \mathrm{x} & +\mathrm{y} & +(1-\mathrm{m})\mathrm{z} & = & \mathrm{m}+2 \\ (1+\mathrm{m})\mathrm{x} & -\mathrm{y} & +2\mathrm{z} & = & 0 \\ 2\mathrm{x} & -\mathrm{my} & +3\mathrm{z} & = & \mathrm{m}+2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = & m \\ x_1 & +7x_2 & -5x_3 & -x_4 & = & 4m \end{cases}$

Bài 3.3: Tìm điều kiện của tham số m để các hệ phương trình sau đây có nghiệm:

a) $\begin{cases} mx & +y & +z & = & m \\ 2x & +(1+m)y & +(1+m)z & = & m-1 \\ x & +y & +mz & = & 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (2+m)x & +my & +mz & = & 1 \\ x & +my & +z & = & m \\ x & +y & +mz & = & 1 \end{cases}$

Bài 3.4: Tìm các đa thức bậc ba f(x) biết

a) $f(1) = 2$; $f(-1) = -4$; $f(2) = 8$; $f(-2) = -28$.

b) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua các điểm:

$$(1,4)\ ;\ (3,32)\ ;\ (-3,-4)\ ;\ (2,11)\ .$$

Bài 3.5: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A rồi áp dụng kết quả đó giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x & +2y & +2z & = & 1 \\ 2x & +3y & +6z & = & 1 \\ x & -y & +7z & = & m \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x & +3y & -z & = & 1 \\ x & +2y & +z & = & 1 \\ 2x & +6y & +7z & = & m \end{cases}$

c) $\begin{cases} -8x & +5y & -2z & = & 1 \\ 27x & -16y & +6z & = & 1 \\ -5x & +3y & -z & = & m \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x & -y & +2z & = & 1 \\ 3x & -2y & +6z & = & 1 \\ -x & -y & +7z & = & m \end{cases}$

Bài 3.6: Tìm hệ nghiệm cơ bản của các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

a) $\begin{cases} x-3y+\quad z=0 \\ 4x+2y-3z=0 \\ 5x-y-2z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3+2x_4=0 \\ 3x_1-2x_2+2x_3+x_4=0 \\ x_1+4x_2-6x_3+3x_4=0 \end{cases}$

Chương 4
KHÔNG GIAN VÉCTƠ

Các khái niệm trong chương này tương đối trừu tượng, vì chúng tổng quát hoá các khái niệm mà sinh viên đã biết trong chương trình toán phổ thông trung học.

Trong chương trình phổ thông, sinh viên đã gặp khái niệm véctơ trong mặt phẳng Oxy, trong không gian Oxyz, véctơ lực torng vật lý, … với các phép toán cộng hai véctơ và nhân một số với một véctơ. Tuy nhiên, ta có thể thấy một số tập hợp khác cũng có các phép toán này, chẳng hạn như tập các đa thức, tập các ma trận, …

Để nghiên cứu chúng theo một quan điểm thống nhất, người ta gọi chung các tập hợp có đặc tính như trên là *không gian véctơ*, từ đó, mỗi tập hợp chỉ là một trường hợp đặc biệt mà thôi.

4.1. Định nghĩa không gian véctơ

Xét tập $\mathbb{V} \neq \varnothing$, mỗi phần tử của $\mathbb{V}$ gọi là một véctơ, và tập số thực $\mathbb{R}$.

Giả sử trong $\mathbb{V}$ ta định nghĩa được hai phép toán: phép cộng 2 véctơ và phép nhân một véctơ với một số thực

- □ Phép cộng 2 véctơ $x, y \in \mathbb{V}$, ký hiệu $x + y$, là một véctơ.
- □ Phép nhân một véctơ $x \in \mathbb{V}$ và một số thực k, ký hiệu là kx, cũng là một véctơ.

Nếu 2 phép toán trên thỏa mãn 10 yêu cầu sau thì $\mathbb{V}$ được gọi là một **không gian véctơ** trên $\mathbb{R}$.

1). Nếu $x, y \in \mathbb{V}$ thì $x + y \in \mathbb{V}$

2). Nếu $x \in \mathbb{V}$ và k$\in \mathbb{R}$ thì k$x \in \mathbb{V}$

3). $\forall x \in \mathbb{V}$ và $\forall y \in \mathbb{V}$ thì $x + y = y + x$

4). $\forall x, y, z \in \mathbb{V}$ thì x+(y+z)=(x+y)+z

5). $\exists\theta \in \mathbb{V}$ sao cho $\forall$x$\in y \in \mathbb{V}$ thì x+θ=θ+x=x.

Phần tử θ gọi là **phần tử trung hòa**.

6). $\forall$x$\in y \in \mathbb{V}$ thì $\exists$(-x)$\in y \in \mathbb{V}$ sao cho

x+(-x)=(-x)+x=θ.

(-x) gọi là **phần tử đối** của x.

7). $\forall$k$\in \mathbb{R}$ và $\forall$x,y$\in y \in \mathbb{V}$ thì k(x+y)=kx+ky

8). $\forall$k,l$\in \mathbb{R}$ và $\forall$x$\in y \in \mathbb{V}$ ta đều có (k+l)x=kx+lx

9). $\forall$k,l$\in \mathbb{R}$ và $\forall$x$\in y \in \mathbb{V}$ ta có k(lx)=(kl)x

10). 1.x=x

10 yêu cầu trên gọi là 10 tiên đề của không gian véctơ trong đó 2 yêu cầu đầu tiên còn gọi là yêu cầu (tiên đề) "đóng kín" với 2 phép toán cộng và nhân với số.

4.2. Một số không gian véctơ thường gặp

4.2.1. Không gian $\mathbb{R}^n$

Gọi $\mathbb{R}^n$ là tập mà mỗi phần tử là một bộ n số thực có thứ tự $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$.

Xét 2 phần tử $x, y \in \mathbb{R}^n$ với

$$x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right); \quad y = \left(y_1, y_2, ..., y_n\right).$$

Ta định nghĩa phép cộng và phép nhân như sau:

$$(x+y)=\left(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n\right) \tag{4.1}$$

$$kx=\left(kx_1,kx_2,\ldots,kx_n\right),\ k\in\mathbb{R} \tag{4.2}$$

Kiểm tra 10 tiên đề ta thấy đều thỏa mãn với phần tử trung hòa là $\theta=\left(0,0,\ldots,0\right)$ và phần tử đối

$$\left(-x\right)=\left(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n\right) \tag{4.3}$$

Vậy $\mathbb{R}^n$ là một không gian véctơ.

Để ý: Hai phần tử trong $\mathbb{R}^n$ bằng nhau theo nghĩa: các thành phần tương ứng của chúng bằng nhau, nghĩa là

$$\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right)\Leftrightarrow x_i=y_i,\forall i=\overline{1,n} \tag{4.4}$$

Ví dụ 4. 1 $\mathbb{R}^2$ (với hệ trục tọa độ vuông góc Đềcác) với các phép toán đã biết ở chương trình phổ thông trung học là một không gian véctơ.

4.2.2. Không gian $\mathbb{P}_n[x]$

Gọi tập $\mathbb{P}_n[x]$ là tập các đa thức biến x có bậc không quá n. Trên $\mathbb{P}_n[x]$ xác định phép cộng hai đa thức và nhân đa thức với một số là phép cộng và nhân thông thường:

$$\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+\sum_{i=0}^{n}b_ix^i=\sum_{i=0}^{n}\left(a_i+b_i\right)x^i; \tag{4.5}$$

$$\alpha\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=\sum_{i=0}^{n}\alpha a_ix^i \tag{4.6}$$

$\mathbb{P}_n[x]$ với phép cộng và nhân với số như trên tạo thành không gian véctơ.

Để ý, hai đa thức bằng nhau theo nghĩa "đồng nhất hệ số" (đây chính là khái niệm "hệ số bất định" mà ta từng biết), nghĩa là

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i = \overline{0,n} \qquad (4.7)$$

4.2.3. Không gian $\mathbf{M_{m\times n}}(\mathbb{R})$

Ký hiệu $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ là tập các ma trận cỡ (m×n) với các phần tử thực.

Trên $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ta định nghĩa phép cộng hai ma trận và nhân ma trận với số thông thường (đã định nghĩa trong nội dung phép toán ma trận 2.3).

Tập $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ với phép cộng và nhân đó tạo thành không gian véctơ.

Lưu ý: Trong tài liệu này, từ nay ta ngầm hiểu các điều sau:

- □ Đối với các không gian trên, khi không nói rõ phép toán thì ngầm hiểu là các phép toán đã định nghĩa ở trên.
- □ Khi đề cập đến một không gian véctơ, ta ngầm hiểu trên đó đã trang bị hai phép toán "+" và "**.**"

4.3. Các tính chất của không gian véctơ

Không gian véctơ có các tính chất sau:

1. Phần trung hòa θ là duy nhất

2. $\forall x \in \mathbb{V}$, phần tử đối (-x) là duy nhất

3. $\forall x \in \mathbb{V}$, ta đều có 0.x=θ

4. $\forall x \in \mathbb{V}$, ta đều có (-1)x=(-x)

5. $\forall k \in \mathbb{R}$, ta đều có k. θ=θ

6. Nếu k.x=θ thì hoặc k=0 hoặc là x=θ

4.4. Không gian con

Cho không gian véctơ $\mathbb{V}$ cùng 2 phép toán cộng và nhân. W là một tập con khác rỗng của $\mathbb{V}$. Nếu W cùng với hai phép toán thừa hưởng từ $\mathbb{V}$ cũng lập thành không gian véctơ thì ta nói *W là không gian véctơ con (gọi tắt là không gian con) của không gian véctơ* $\mathbb{V}$.

Ví dụ 4. 2 Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất m phương trình, n ẩn số viết ở dạng ma trận $Ax = \theta$ với

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Gọi W là tập nghiệm của hệ. Nghĩa là:

$$\mathrm{W} = \left\{ u = \left[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\right]^T / Au = \theta \right\}$$

Có thể kiểm tra được W cũng là một không gian véctơ với các phép toán thông thường trong $\mathbb{R}^n$.

Vậy tập nghiệm hệ phương trình thuần nhất là không gian véctơ (gọi là không gian véctơ con của không gian véctơ $\mathbb{R}^n$).

Chẳng hạn, $W = \left\{ \left(x_1, x_2, x_3\right) \in \mathbb{R} / x_1 + x_2 = 0 \right\}$ là một không gian con của $\mathbb{R}^3$

Tổng quát, ta có điều kiện cần và đủ để một tập con của một không gian véctơ là không gian con qua định lý sau.

Định lý: *Cho V là một không gian véctơ và W là một tập con khác rỗng của V. Khi đó W cùng với hai phép toán "+" và "." cảm sinh từ V là một không gian véctơ khi và chỉ khi*

(i) $x + y \in W, \forall x, y \in W$ (4.8)

(ii) $kx \in W, \forall x \in W, \forall k \in \mathbb{R}$ (4.9)

Nhận xét: vậy, điều kiện cần và đủ để một tập con là không gian con là nó đóng kín đối với phép cộng hai véctơ và phép nhân một số với một véctơ.

Ví dụ 4. 3 Chứng tỏ $W = \left\{\left(x_1, x_2, x_3\right) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 = 2x_2\right\}$ là một không gian con của $\mathbb{R}^3$

Giải:

Thấy ngay $W \neq \varnothing$ vì $(0,0,0) \in W$

Lấy hai véctơ bất kỳ $x = \left(x_1, x_2, x_3\right), y = \left(y_1, y_2, y_3\right) \in W$

ta có $x_1 = 2x_2$ (a), $y_1 = 2y_2$ (b)

Xét $x + y = \left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3\right)$, ta có

$$x_1 + y_1 \overset{(a),(b)}{=} 2x_2 + 2y_2 = 2\left(x_2 + y_2\right)$$

Nên $x + y \in W$ (1)

Lấy véctơ bất kỳ $x = \left(x_1, x_2, x_3\right) \in W$ và số thực tùy ý $k \in \mathbb{R}$

Xét $kx = \left(kx_1, kx_2, kx_3\right)$ ta có

$$\left(kx_1\right) \overset{(a)}{=} \left(k\left(2x_2\right)\right) = 2\left(kx_2\right)$$

nên $kx \in W$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra W là một không gian con của $\mathbb{R}^3$.

4.5. Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính của hệ véctơ

4.5.1. Tổ hợp tuyến tính

V là một không gian véctơ, $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *là một hệ gồm n véctơ của V . Véctơ*

$$v = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n, \quad c_i \in \mathbb{R} \ (i=1,2,\ldots,n) \qquad (4.10)$$

gọi là một tổ hợp tuyến tính của hệ S.

Ví dụ 4. 4 Trong không gian $\mathbb{R}^2$, véctơ v=(7,-1) là tổ hợp tuyến tính của hai véctơ u_1=(2,1) và u_2=(1,-1) vì

$$2u_1 + 3u_2 = (4,2) + (3,-3) = v$$

Ví dụ 4. 5 Véctơ $v = (7,-3,0) \in \mathbb{R}^3$ có phải là tổ hợp tuyến tính của hệ 2 véctơ

$$u_1 = (1,1,0);\ u_2 = (1,-1,0)$$

không?

Giải:

v là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2

$$\Leftrightarrow \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R} : v = c_1u_1 + c_2u_2$$

Mà

$$c_1u_1 + c_2u_2 = v \Leftrightarrow c_1(1,1,0) + c_2(1,-1,0) = (7,-3,0)$$
$$\Leftrightarrow (c_1 + c_2, c_1 - c_2, 0) = (7,-3,0)$$

Theo định nghĩa 2 véctơ bằng nhau trong $\mathbb{R}^3$ ta có

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 7 \\ c_1 - c_2 = -3 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 5 \end{cases}$$

Vậy $v = 2u_1 + 5u_2$, nghĩa là v là tổ hợp tuyến tính của hệ hai véctơ u_1, u_2.

Ví dụ 4. 6 Véctơ $v = (0,0,1)$ không phải tổ hợp tuyến tính của hệ hai véctơ $u_1 = (1,1,0)$ và $u_2=(1,-1,0)$.

Thật vậy, giải hệ $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$ ta không tìm được c_1, c_2 thỏa mãn yêu cầu 0 = 1.

Định nghĩa:

Nếu véctơ v là tổ hợp tuyến tính của hệ gồm n véctơ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ thì ta nói v ***biểu diễn tuyến tính*** *(hay* ***biểu thị tuyến tính****) được qua hệ véctơ $u_1, u_2, \ldots, u_n$.*

Từ các ví dụ trên ta thấy việc xét một véctơ cho trước có là tổ hợp tuyến tính của một hệ véctơ cho trước trong không gian $\mathbb{R}^n$

chính là việc xét xem một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm hay không. Vậy ta có định lý trong $\mathbb{R}^n$ như sau:

Định lý:

Trong $\mathbb{R}^n$, giả sử S là hệ các véctơ:

$u_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots, a_{1n})$

$u_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots\ldots, a_{2n})$

………………………………………

….

$u_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots\ldots, a_{mn})$

và $u = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

Đặt

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{21} & \ldots\ldots & a_{m1} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{m2} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \multicolumn{4}{c}{\underbrace{a_{1n} \quad a_{2n} \quad \ldots\ldots \quad a_{mn}}_{A}} & b_n \end{array} \right)$$

Khi đó:

u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_m \Leftrightarrow r(A) = r(\overline{A})$ (4.11)

Ghi chú: Các cột của $\overline{A}$ được lập từ các thành phần của các véctơ u_j

Ví dụ 4. 7 Xét lại ví dụ 4.5: Véctơ $v = (7, -3, 0) \in \mathbb{R}^3$ có phải là tổ hợp tuyến tính của hệ 2 véctơ

$$u_1 = (1,1,0);\ u_2 = (1,-1,0)$$

không?

Ta xét ma trận

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Thấy ngay *r(A) = r($\overline{A}$)*. Vậy v là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2

4.5.2. Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Cho V là một không gian véctơ và

$$S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$$

là một hệ các véctơ trong V.

Định nghĩa

□ *Nếu đẳng thức*

$$c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_nu_n = \theta$$

chỉ xảy ra khi $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ *thì ta nói hệ S độc lập tuyến tính.*

□ *Nếu đẳng thức*

$$c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_nu_n = \theta$$

xảy ra với ít nhất một hệ số $c_i \neq 0$ *thì ta nói hệ S phụ thuộc tuyến tính.*

Ví dụ 4. 8 Xét xem hệ 2 véctơ $u_1 = (1,2);\ u_2 = (1,1)$ trong không gian $\mathbb{R}^2$ độc lập hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải:

Xét đẳng thức véctơ $c_1u_1 + c_2u_2 = \theta$ (*)

Ta thấy

$$(*) \Leftrightarrow (c_1, 2c_1) + (c_2, c_2) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được nghiệm duy nhất $c_1=c_2=0$.

Vậy hệ 2 véctơ đã cho là hệ độc lập tuyến tính. □

Ví dụ 4. 9 Hệ 2 véctơ $\{(3,-6),(-2,4)\}$ trong $\mathbb{R}^2$ là hệ phụ thuộc tuyến tính vì đẳng thức

$$c_1(3,-6) + c_2(-2,4) = (0,0)$$

tương đương hệ phương trình $\begin{cases} 3c_1 - 2c_2 = 0 \\ -6c_1 + 4c_2 = 0 \end{cases}$ và hệ này có ít nhất một nghiệm không tầm thường là (2,3). Nghĩa là ta có: $(0,0) = 2(3,-6) + 3(-2,4)$

Tóm lại, để xét tính độc lập hay phụ thuộc tuyến tính của hệ S={u_i}. Ta xét đẳng thức $\sum \alpha_i u_i = 0$, đẳng thức này tương đương hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với các ẩn là α_i. Nếu hệ có nghiệm không tầm thường thì hệ S phụ thuộc tuyến tính, nếu hệ chỉ có nghiệm tầm thường thì hệ S độc lập tuyến tính.

Các tính chất

Tính chất 1: *Nếu hệ* $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ *độc lập tuyến tính thì mọi hệ con của nó cũng độc lập tuyến tính.*

Tính chất 2: *Mọi hệ véctơ S có chứa một hệ con phụ thuộc tuyến tính thì hệ S cũng phụ thuộc tuyến tính.*

Tính chất 3: *Hệ véctơ* $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ *phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại ít nhất một véctơ* u_i *là tổ hợp tuyến tính của hệ (n-1) véctơ còn lại trong S.*

4.6. Hạng của hệ véctơ

Cho hệ n véctơ $S = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ trong không gian véctơ V.

4.6.1. Định nghĩa

Hạng của hệ S ký hiệu là r(S) được định nghĩa là số véctơ độc lập tuyến tính cực đại trong S.

Nghĩa là nếu r(S)=r thì:

- □ Trong S có thể tìm được hệ con gồm r véctơ độc lập tuyến tính.
- □ Nếu hệ véctơ con của S chứa nhiều hơn r véctơ thì hệ véctơ con đó phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 4. 10 Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$, hệ

$$\{u_1 = (1,2,-1), u_2 = (-5,1,1), u_3 = (7,3,-3)\}$$

có hạng là 2. Vì dễ dàng kiểm tra được u_1, u_2 độc lập tuyến tính, còn $\{u_1, u_2, u_3\}$ phụ thuộc tuyến tính vì $u_3 = 2u_1 - u_2$.

4.6.2. Định lý trong không gian véctơ $\mathbb{R}^n$

Trong không gian $\mathbb{R}^n$ cho hệ S gồm m véctơ:

$$u_i = \left(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\right) \text{ , } (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Lập ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$, được gọi là ma trận của hệ S.

Định lý:

Hạng của hệ véctơ trong không gian $\mathbb{R}^n$ bằng hạng của ma trận của hệ đó:

$$r(S)=r(A) \tag{4.12}$$

Từ đó suy ra

- □ *Nếu r(A)=m = số véctơ trong hệ thì hệ S độc lập tuyến tính.*
- □ *Nếu r(A)=r(S)=r<m thì trong S có hệ con r véctơ độc lập tuyến tính còn tất cả hệ con gồm (r+1), (r+2),..., m véctơ đều phụ thuộc tuyến tính.*

Ví dụ 4. 11 Trong $\mathbb{R}^4$ cho hệ S gồm 4 véctơ

$u_1 = (1, -1, 2, 1)$; $u_2 = (-2, 2, -4, -2)$;

$u_3 = (2, 1, 2, 2)$; $u_4 = (1, 2, 0, 1)$

Tìm r(S)

Giải:

Lập ma trận A của hệ rồi tính hạng, ta có:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ -2 & 2 & -4 & -2\\ 2 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[h4=h4-h3+h1]{\substack{h2=h2+2h1\\ h3=h3-2h1}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Vậy r(S)= r(A)=2 □

Trong ví dụ trên, ta chỉ có thể lấy tối đa 2 véctơ độc lập tuyến tính trong S, chẳng hạn, có thể lấy $\{u_1, u_3\}$. Các hệ con bất kỳ của S chứa 3 hoặc 4 véctơ đều là hệ phụ thuộc tuyến tính.

4.7. Cơ sở

Hệ véctơ $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ gọi là **được sắp** nếu ta có quan tâm đến thứ tự của các véctơ trong hệ, nếu đổi thứ tự các véctơ trong hệ thì ta được một hệ véctơ khác.

Ví dụ 4. 12 Hệ véctơ $\{u_1, u_2, u_3\}$ khác với hệ véctơ $\{u_2, u_1, u_3\}$

4.7.1. Định nghĩa: *Hệ được sắp các véctơ*

$$B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$$

*được gọi là **cơ sở của không gian véctơ V** nếu thỏa 3 điều sau:*

(i). $u_i \in V, \forall i = \overline{1, n}$

(ii). B độc lập tuyến tính.

(iii). $\forall v \in V$, v *là tổ hợp tuyến tính của các véctơ trong hệ B, nghĩa là luôn tìm được các* $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$ *để cho*

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots \alpha_n u_n$$

Ghi chú:

☐ Nếu B thỏa điều kiện (iii) thì ta còn nói ***B sinh ra V*** và viết là

V=<B>, hay V=Span(B) (4.13)

còn *B gọi là **tập sinh** của V*.

☐ Giả sử V là không gian véctơ và B là một hệ véctơ trong V. Người ta chứng minh được rằng tập W=<B>=Span(B) cũng là một không gian véctơ với các phép toán cộng và nhân định nghĩa trong V. Lúc này ta nói *W là **không gian con sinh bởi hệ véctơ** B*.

☐ Từ đây về sau khi nói đến cơ sở thì ta hiểu đó là cơ sở được sắp.

Ví dụ 4. 13 Hệ véctơ

$$\{ e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1) \}$$

là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$ vì hệ này thỏa (i) và (ii), đồng thời

$$\forall x = \left(x_1, x_2 x_3\right) \in \mathbb{R}^3,\ x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

$\{ e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1) \}$ còn gọi là **cơ sở chính tắc của** $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 4. 14 Không gian $\mathbb{P}_n[x]$ có một cơ sở là $\left\{1, x, x^2, ..., x^n\right\}$ gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{P}_n[x]$. Vì có thể kiểm tra được ngay là $\left\{1, x, x^2, ..., x^n\right\}$ độc lập tuyến tính và mọi đa thức trong $\mathbb{P}_n[x]$ đều là tổ hợp tuyến tính của $\left\{1, x, x^2, ..., x^n\right\}$ vì chúng có dạng

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

4.7.2. Tính chất của cơ sở, số chiều

Tính chất 1: *Mọi cơ sở của một không gian véctơ V đều có số véctơ bằng nhau và bằng một số không đổi được gọi là* ***số chiều của không gian*** $\mathbb{V}$*, ký hiệu* $\dim \mathbb{V}$.

Nếu $\dim \mathbb{V} = n$ *hữu hạn thì ta nói không gian* $\mathbb{V}$ *là hữu hạn chiều. Nếu* $\mathbb{V}$ *có một tập gồm vô số véctơ độc lập tuyến tính thì ta nói* $\mathbb{V}$ *là không gian véctơ vô hạn chiều.*

Ghi chú: Trong chương trình, ta chỉ xét các không gian hữu hạn chiều.

Ví dụ 4. 15

- □ Vì $\mathbb{R}^3$ có một cơ sở gồm 3 véctơ nên dim($\mathbb{R}^3$)=3. Tổng quát $\mathbb{R}^n$ là không gian n chiều, tức là

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

- □ {θ} là không gian có số chiều là 0 ({θ} là không gian con tầm thường của không gian véctơ V, nó chỉ gồm một phần tử là phần tử trung hòa của V).
- □ Vì $P_n[x]$ có cơ sở gồm $n+1$ nên

$$\dim \mathbb{P}_n[x] = n + 1$$

Tính chất 2: *Nếu* $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ *là một cơ sở của không gian V thì mọi véctơ* $v \in \mathbb{V}$ *, v chỉ có một cách biểu thị tuyến tính duy nhất qua B. Nghĩa là tồn tại duy nhất bộ n số thực* α_1*,* α_2*, ...,* α_n *sao cho* $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ *. Và ngược lại, nếu mỗi véctơ* $v \in \mathbb{V}$ *,* v *chỉ có duy nhất một cách biểu thị tuyến tính qua hệ véctơ B nào đó thì B là cơ sở của không gian* $\mathbb{V}$ *.*

Tính chất 3: *Cho không gian* $\mathbb{V}$ *có số chiều là n và S là một hệ véctơ của* $\mathbb{V}$ *. Khi đó: Nếu S có nhiều hơn n véctơ thì S là hệ phụ thuộc tuyến tính, nếu S có ít hơn n véctơ thì S không thể là hệ sinh ra* $\mathbb{V}$ *.*

Chẳng hạn, mọi hệ gồm 4 véctơ trong không gian $\mathbb{R}^3$ đều là hệ phụ thuộc tuyến tính vì $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ (nếu hệ 4 véctơ này là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ thì dim $\mathbb{R}^3$=3, vô lý).

Tính chất 4: *Cho không gian* $\mathbb{V}$ *có số chiều là n và S là một hệ véctơ của* $\mathbb{V}$ *. Khi đó: Nếu S có đúng n véctơ thì S là một cơ sở của* $\mathbb{V}$ *khi và chỉ khi S độc lập tuyến tính.*

Ví dụ 4. 16 Hệ

$$B = \{u_1 = (1,1,2), u_2 = (1,-1,0), u_3 = (2,0,1)\}$$

có là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ không?

Giải:

Theo tính chất trên thì: vì số véctơ trong B và số chiều của $\mathbb{R}^3$ bằng nhau nên B là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ $\Leftrightarrow$ B độc lập tuyến tính.

Xét $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1+0+0+4-0-1 = 2 \neq 0$

Suy ra B độc lập tuyến tính $\Rightarrow$ B là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

Tính chất 5: *Cho* $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ *là một hê véctơ của* $\mathbb{V}$. *Nếu hạng của hệ bằng r và W là không gian con sinh ra bởi hệ:* $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ *thì dimW=r. Nói cách khác, số chiều không gian con bằng hạng của hệ véctơ sinh ra không gian con đó.*

4.8. Tọa độ - Ma trận chuyển cơ sở

4.8.1. Tọa độ

Cho $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của không gian $\mathbb{V}$ và v là một véctơ của $\mathbb{V}$. Theo tính chất 2, véctơ v chỉ có duy nhất một cách biểu thị tuyến tính qua *B*:

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n \,,\ \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Định nghĩa:

Các số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *gọi là các tọa độ của* v *đối với cơ sở B.*

Véctơ $(v)_B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *trong* $\mathbb{R}^n$ *gọi là véctơ tọa độ của* v *đối với cơ sở B.*

Véctơ cột $[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ *gọi là ma trận tọa độ của véctơ* v *trong cơ sở B.*

Vậy ta có:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$$

hay

$$(v)_B = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) \Leftrightarrow v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$$

Ví dụ 4. 17 Trong không gian $\mathbb{R}^2$ cho cơ sở

$$\text{B} = \{u_1 = (0,1),\ u_2 = (1,1)\}$$

Véctơ $v = (2,3)$ có thể biểu diễn qua cơ sở B như sau

$$v = 1.u_1 + 2.u_2$$

Vậy tọa độ của v trong cơ sở B là $[v]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4.8.2. Ma trận chuyển cơ sở

Bây giờ ta tìm hiểu mối liên hệ giữa tọa độ của cùng một véctơ u trong 2 cơ sở B và E.

Giả sử trong không gian véctơ $\mathbb{V}$ cho 2 cơ sở:

$$B = \left\{u_1, u_2, \ldots, u_n\right\} \text{ và } E = \left\{v_1, v_2, \ldots, v_n\right\}.$$

Biểu diễn các véctơ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ qua cơ sở B:

$$v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{n1}u_n$$
$$v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{n2}u_n$$
....
$$v_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{nn}u_n$$

lấy các hệ số biểu diễn trên các hàng viết thành cột, ta lập được một ma trận vuông gọi là **ma trận chuyển cơ sở** từ B sang E và ký hiệu là $P_{B\to E}$

$$P_{B\to E} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Khi đó

$$\boxed{[u]_B = P_{B\to E}.[u]_E} \quad (4.14)$$

Thấy ngay cột thứ j của ma trận $P_{B\to E}$ chính là ma trận tọa độ $\left[v_j\right]_B$ nên ta có thể viết

$$\boxed{P_{B\to E} = \left[\left[v_1\right]_B \left[v_2\right]_B \ldots \left[v_n\right]_B\right]} \quad (4.15)$$

Ví dụ 4. 18 Trong $\mathbb{R}^2$ cho 2 cơ sở B=$\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ và E=$\{v_1 = (1,1),\ v_2 = (2,\text{-}3)\}$.

Ta có $v_1 = 1e_1 + 1e_2$ và $v_2 = 2e_1 - 3e_2$

vậy ma trận chuyển cơ sở từ B sang E là:

$$P_{B\to E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Ngược lại, các véctơ trong B có thể biểu diễn qua cơ sở E như sau: $e_1 = \frac{3}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2,\ e_2 = \frac{2}{5}v_1 - \frac{1}{5}v_2$, vậy ma trận chuyển cơ sở từ E sang B là:

$$P_{E\to B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Có thể kiểm tra và thấy ngay $P_{B\to E} = P_{E\to B}^{-1}$.

Ví dụ 4. 19

Trong $\mathbb{R}^2$ cho 2 cơ sở

B=$\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ và E=$\{v_1 = (1,1),\ v_2 = (2,1)\}$. Theo các ví dụ trên, ta tìm được

$$P_{B\to E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nếu cho $u = (3,4)$ thì ta có $[u]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$; $[u]_E = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

Có thể kiểm tra được ngay

$$P_{B\to E}.[u]_E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = [u]_B$$

4.8.3. Các tính chất của ma trận chuyển cơ sở

Tính chất 1: *Với 2 cơ sở B và E cho trước thì chỉ có duy nhất một ma trận chuyển cơ sở từ B sang E.*

(Do tính duy nhất của tọa độ của véctơ đối với một cơ sở)

Tính chất 2: *Ma trận chuyển cơ sở từ B sang E: $P_{B\to E}$ khả nghịch và nghịch đảo của ma trận $P_{B\to E}$ là ma trận chuyển cơ sở từ E sang B: $\left[P_{B\to E}\right]^{-1} = P_{E\to B}$*

Vì E là cơ sở nên ma trận chuyển từ B sang E khả nghịch. Từ $[u]_B = P_{B\to E}.[u]_E \Rightarrow [u]_E = P^{-1}{}_{B\to E}.[u]_B$ nên

$$\left[P_{B\to E}\right]^{-1} = P_{E\to B} \tag{4.16}$$

Ví dụ 4. 20 Cho ma trận chuyển cơ sở từ B sang E là

$$P_{B\to E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đó ma trận chuyển cơ sở từ E sang B là

$$P_{E\to B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Tính chất 3: *Nếu trong V có 3 cơ sở B, E, F với các ma trận chuyển cơ sở là $P_{B\to F}$; $P_{B\to E}$; $P_{E\to F}$ thì ta có*

$$P_{B\to F} = P_{B\to E}.P_{E\to F}$$

4.9. Không gian Euclide

4.9.1. Tích vô hướng

Cho $\mathbb{V}$ là không gian véctơ.

Định nghĩa

Tích vô hướng trong không gian véctơ $\mathbb{V}$ là một qui luật cho tương ứng 2 véctơ u, v của $\mathbb{V}$ với một số thực duy nhất α, ký hiệu $\langle u, v\rangle = \alpha$, thỏa mãn 4 tiên đề:

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle,\ \forall u, v \in \mathbb{V}$

2. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle\ ,\forall u, v, w \in \mathbb{V}$

3. $\langle ku, v\rangle = k\langle u, v\rangle\ ,\forall u \in \mathbb{V},\ \forall k \in \mathbb{R}$

4. $\forall u \in \mathbb{V}, \langle u, u\rangle \geq 0$ *và* $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = \theta$

Định nghĩa

Một không gian véctơ $\mathbb{V}$ hữu hạn chiều mà trên đó có tích vô hướng thì được gọi là không gian Euclide.

Nếu không gian véctơ vô hạn chiều và trên đó có định nghĩa tích vô hướng thì ta có khái niệm **"Không gian có tích vô hướng"**

Ví dụ 4. 21 Trong $\mathbb{R}^n$, đặt tích vô hướng như sau:

Nếu $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và $v = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ thì

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n\,.$$

Tích vô hướng đó gọi là **tích vô hướng Euclide**.

Kiểm tra 4 tiên đề ta thấy tích vô hướng này thỏa mãn. Do đó không gian $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng trên lập thành một không gian Euclide. □

Ghi chú: Trong $\mathbb{R}^n$, nếu không nói rõ tích vô hướng ta ngầm hiểu là tích vô hướng Euclide.

4.9.2. Độ dài véctơ

Định nghĩa

Cho $\mathbb{V}$ *là không gian Euclide. Ứng với mỗi véctơ* $u \in \mathbb{V}$ *có một số không âm xác định bởi công thức* $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ *gọi là độ dài véctơ* u.

Ví dụ 4. 22 Trong $\mathbb{R}^2$ với tích vô hướng Euclide, ứng với mỗi véctơ $u = (x, y)$ có độ dài tương ứng là $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ □

Các tính chất của độ dài

a. $\forall u \in \mathbb{V}$ thì $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta$

b. $\|ku\| = |k|\,\|u\|$ $\forall u \in \mathbb{V}$ và với mọi $k \in \mathbb{R}$

c. Bất đẳng thức Cauchy-Schward:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|\,,\ \forall\, u, v \in \mathbb{V}$$

d. Bất đẳng thức tam giác:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

4.9.3. Sự trực giao

Ta tổng quát hoá khái niệm véctơ vuông góc trong chương trình phổ thông bằng khái niệm trực giao như sau.

Véctơ trực giao

Định nghĩa

Hai véctơ u, v *gọi là trực giao với nhau nếu chúng thỏa* $\langle u, v \rangle = 0$ *, ký hiệu* $u \perp v$.

Ví dụ 4. 23 Trong $\mathbb{R}^2$ với tích vô hướng Euclide cho

$u = (2,\text{-}1),\ v = (2,4)$

Khi đó

$$\langle u, v \rangle = 2 \times 2 + (-1) \times 4 = 0$$

Vậy u, v là hai véctơ trực giao nhau.

Nhận xét: Có thể thấy rằng véctơ θ trực giao với mọi véctơ.

Hệ véctơ trực giao

- ☐ Hệ véctơ $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ được gọi là hệ véctơ trực giao nếu $\forall i \neq j$ ta đều có

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0.$$

- ☐ Cơ sở E của không gian véctơ $\mathbb{V}$ gọi là **cơ sở trực giao** nếu các véctơ của cơ sở E lập nên hệ véctơ trực giao.

Ví dụ 4. 24 Trong không gian $\mathbb{R}^3$ có cơ sở $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ với $e_1 = (1,0,0)$; $e_2 = (0,1,0)$; $e_3 = (0,0,1)$ là cơ sở trực giao.

Ngoài ra trong không gian $\mathbb{R}^3$ có thể có nhiều cơ sở trực giao khác như cơ sở $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ với

$$u_1 = (1,1,2);\ u_2 = (1,1,\text{-}1);\ u_3 = (\text{-}1,1,0)$$

vì $< u_1, u_2 >= 0$; $< u_1, u_3 >= 0$; $< u_2, u_3 >= 0$. □

4.10. Cơ sở trực chuẩn

Định nghĩa: *Hệ véctơ trực giao trong đó mọi véctơ có độ dài bằng 1 gọi là hệ véctơ trực chuẩn.*

Ví dụ 4. 25 Trong $\mathbb{R}^3$, hệ véctơ

$$S = \left\{u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

là hệ trực chuẩn.

Định nghĩa: Nếu hệ véctơ trực chuẩn B là cơ sở của không gian $\mathbb{V}$ thì B được gọi là cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{V}$.

Ví dụ 4. 26 Trong không gian $\mathbb{R}^3$ có cơ sở chính tắc $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ với $e_1 = (1,0,0)$; $e_2 = (0,1,0)$; $e_3 = (0,0,1)$. Đây cũng làcơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$. □

Các tính chất

- Nếu $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là hệ các véctơ trực giao không chứa véctơ θ thì hệ S là độc lập tuyến tính.
- Nếu $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là hệ véctơ trực chuẩn thì S độc lập tuyến tính.

□ Hệ véctơ $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ trực giao thì ta có

$$\|u_1 + u_2 + \ldots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \ldots + \|u_n\|^2$$

□ Nếu B và E là 2 cơ sở trực chuẩn trong V và $P_{B\to E}$ là ma trận chuyển cơ sở từ B sang E thì

$$[P_{B\to E}]^T = [P_{B\to E}]^{-1} = P_{E\to B}$$

Ma trận khả nghịch có tính chất : $P^T = P^{-1}$ *gọi là* ***ma trận trực giao***.

□ Nếu $v \neq \theta$ trực giao với các véctơ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ thì $v \notin Span(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Định lý: *Nếu* $B = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *là một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclide* $\mathbb{V}$ *thì* $\forall v \in \mathbb{V}$

$$v = \langle v, u_1\rangle u_1 + \langle v, u_2\rangle u_2 + \cdots + \langle v, u_n\rangle u_n$$

Nghĩa là ta có thể dễ dàng suy ra tọa độ của một véctơ bất kỳ thông qua tích vô hướng.

Ví dụ 4. 27 Trong $\mathbb{R}^3$, tìm tọa độ của $u = (1,2,3)$ đối với cơ sở

$$S = \left\{u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$$

Giải:

Thấy ngay B là cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ nên tọa độ của u trong cơ sở B là

$$[u]_B = \begin{bmatrix} \langle u, u_1 \rangle \\ \langle u, u_2 \rangle \\ \langle u, u_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{6}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{3}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Sự tồn tại cơ sở trực chuẩn trong không gian Euclide được cho bởi định lý sau:

Định lý: *Mọi không gian Euclide khác $\{\theta\}$ đều tồn tại ít nhất một cơ sở trực chuẩn.*

Trực giao hoá – Trực chuẩn hóa

Định lý

Trong không gian Euclide V, nếu $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ là hệ véctơ độc lập tuyến tính thì ta luôn có thể tìm được hệ véctơ trực giao $S' = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ sao cho với mọi k≤m thì không gian con do các véctơ $\{v_1, v_2, \ldots v_k\}$ sinh ra luôn trùng với không gian con do các véctơ $\{u_1, u_2, \ldots u_k\}$ sinh ra.

Phương pháp Gram-Schmidt (Trực giao hoá)

Từ hệ gồm m véctơ độc lập tuyến tính

$$S = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$$

Gram-Schmidt cho phương pháp tìm hệ $S' = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ trực giao thỏa mãn định lý trên như sau:

Đặt $v_1 = u_1$;

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2$$

……

$$v_m = u_m - \frac{\langle u_m, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle u_m, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 - ... - \frac{\langle u_m, v_m\rangle}{\langle v_m, v_m\rangle} v_m$$

Trực chuẩn hoá

Sau khi trực giao hoá theo phương pháp Gram-Schmidt, ta có thể chuẩn hoá các véctơ để được hệ trực chuẩn:

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}; e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}; ...; e_m = \frac{v_m}{\|v_m\|};$$

Hệ quả: *Nếu* $\{u_1, u_2, ... u_n\}$ *là một cơ sở bất kỳ của không gian Euclide* $\mathbb{V}$ *thì từ nó ta có thể xây dựng một hệ cơ sở trực chuẩn của* $\mathbb{V}$.

Ví dụ 4. 28 Trong $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở gồm các véctơ

$$u_1 = (0,1,-1),\ u_2 = (-1,2,0),\ u_3 = (2,1,1)$$

Hãy trực chuẩn hoá cơ sở đó.

Giải:

Trực giao hoá theo phương pháp Gram-Schmidt, lấy

$v_1 = u_1 = (0,1,-1)$;

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = (-1,2,0) - \frac{2}{2}(0,1,-1) = (-1,1,1)$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 = (2,1,1)$$

Ta có hệ cơ sở trực giao

v_1=(0,1,-1); v_2=(-1,1,1); v_3=(2,1,1)

Trực chuẩn hoá: ta có

$$\|v_1\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}; \|v_2\| = \sqrt{3}; \|v_3\| = \sqrt{6}$$

Hệ cơ sở trực chuẩn là:

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{(-1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{(2,1,1)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad \square$$

Ví dụ 4. 29

Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian con của $\mathbb{R}^3$ sau

$$W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 = x_2 + 2x_3\right\}$$

Giải:

Thấy ngay W có một cơ sở là

$$B = \left\{u_1 = (1,1,0), u_2 = (2,0,1)\right\}$$

Ap dụng quá trình trực chuẩn hoá đối với B

Đặt $v_1 = u_1$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = (2,0,1) - \frac{2}{2}(1,1,0) = (1,-1,1)$$

Chuẩn hoá, ta được cơ sở trực chuẩn của W là

$$B' = \left\{u_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), u_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

Nhận xét: Quá trình trực giao hoá trong ví dụ trên có thể bỏ qua nếu ta "cố ý" chọn được một cơ sở trực giao cho W. Chẳng hạn, thay vì chọn cơ sở B như trong ví dụ trên, ta có thể chọn $B = \left\{(1,1,0), (-1,1,-1)\right\}$. Khi đó chỉ cần trực chuẩn hoá bằng cách đem các véctơ chia cho độ dài của chính nó.

□ Đọc thêm: Các mặt bậc 2 chính tắc trong $\mathbb{R}^3$

Phần này các bạn sinh viên theo dõi bài giảng trên lớp, hoặc xem tài liệu [1].

Mặt Elipxoit

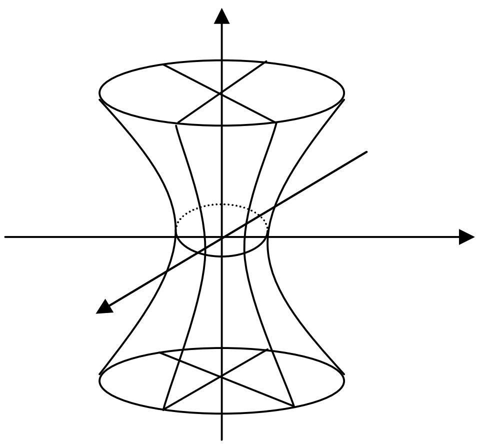
-Phương trình của mặt Elipxoit:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

-Khi $a=b=c=R$ thì mặt Elipxoit trở thành mặt cầu $x^2+y^2+z^2=R^2$.

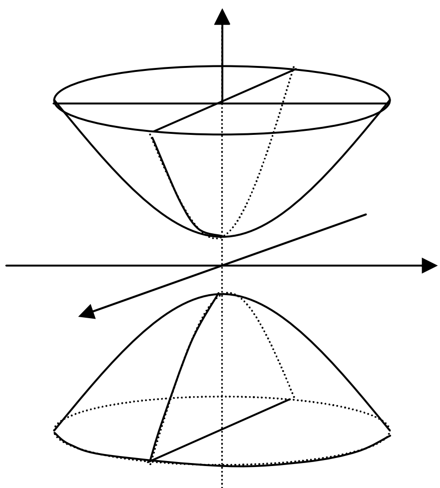
Mặt Hyperboloit

Mặt Hyperboloit một tầng có phương trình: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



Mặt Hyperboloit hai tầng có phương trình:

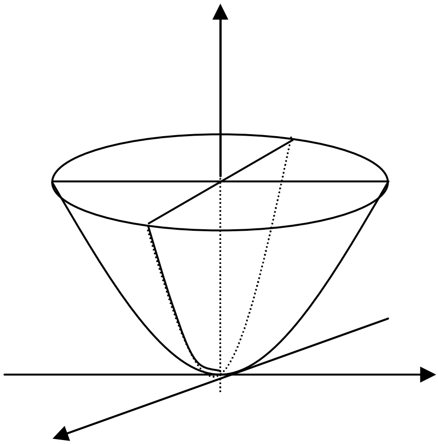
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



Mặt Paraboloit-Eliptic

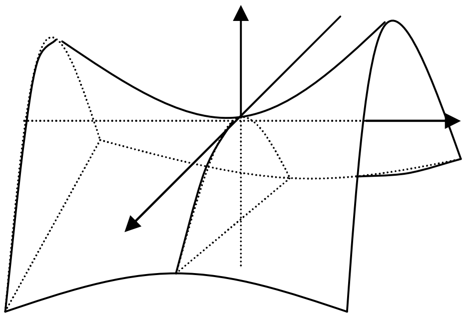
Phương trình: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z$

Khi $a = b$ thì ta có Paraboloit Eliptic tròn xoay



Mặt Paraboloit-Hyperbolic (mặt yên ngựa)

Phương trình: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z$



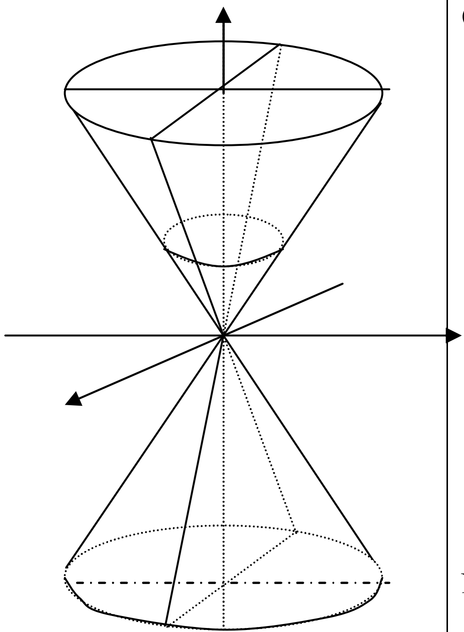
Mặt nón

Phương trình: $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

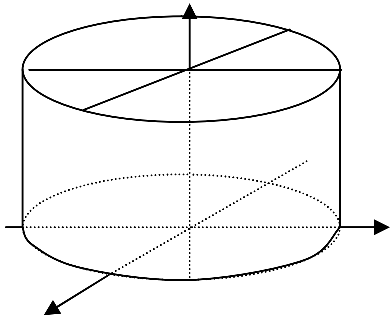
Khi a=b thì ta có mặt nón tròn

Mặt trụ

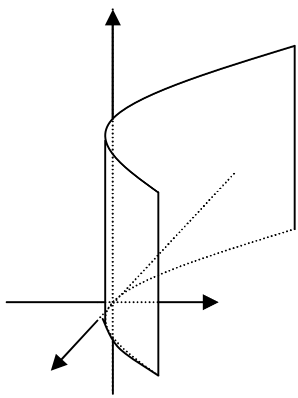
Một đường thẳng d (gọi là đường sinh) song song Oz di chuyển dựa vào một đường cong (C) (gọi là dường chuẩn) trong mặt phẳng Oxy sẽ quét thành một mặt trụ.



Nếu (C) là đường tròn $x^2+y^2=R^2$ trên Oxy:



Nếu (C) là một Parabol $x=y^2$ (trên Oxy):



BÀI TẬP

<u>Bài 4.1</u> Trong các trường hợp sau đây, xét xem W $\subset \mathbb{R}^n$ có là không gian véctơ không. ($n \geq 3$, xét phép toán thông thường trong $\mathbb{R}^n$).

a) $W = \{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0 \}$

b) $W = \{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + 2x_2 = x_3 \}$

c) $W = \{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + ... + x_n = 1\}$

<u>Bài 4.2</u> Trong các trường hợp sau đây, hãy xác định tham số m để véctơ x là tổ hợp tuyến tính của các véctơ u, v, w.

a) Trong $\mathbb{R}^3$: u = (2, 4, 2) , v = (6, 8, 7) , w = (5, 6, m) ,
x = (1,3, 5) .

b) Trong $\mathbb{R}^3$: u = (4, 4, 3) , v = (7, 2, 1) , w = (4, 1, 6) ,
x = (5, 9, m) .

c) Trong $\mathbb{R}^3$: u = (1, -3, 2) , v = (2, -1, 1) , w = (3, -4, 3) ,
x = (1, m, 5).

d) Trong $\mathbb{R}^4$: u = (1, 2, -3, 2) , v = (4, 1, 3, -2) ,
w = (16, 9, 1, -3), x =(m, 4, -7, 7).

<u>Bài 4.3</u> Xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của các tập véctơ sau:

a) M = { (1, 2, 3), (3, 6, 7)} trong $\mathbb{R}^3$.

b) M = {(2, -3, m), (3,-2, 5), (1, -4, 3) } trong $\mathbb{R}^3$.

c) M={ (4,-5,2, 6), (2,-2, 1, 3), (6,-3,3,9), (4, -1, 5, 6)} trong $\mathbb{R}^4$.

<u>Bài 4.4</u> Tìm hạng của các hệ véctơ sau, từ đó suy ra tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của hệ:

a) $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 =(2, 3, -3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

b) $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 =(1, 1, -2)$, $u_3 =(1, 1,2)$ trong $\mathbb{R}^3$.

c) $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (1, 1, -2)$, $u_3 = (0, 3, 3)$,

$u_4 = (2, 3, -3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

d) $u_1 = (1, -1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1, -1)$,

$u_4 = (-1, 0, 0, 1)$ trong $\mathbb{R}^4$.

Bài 4.5 Trong các tập véctơ sau , xét xem tập nào là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

a) $M = \{ u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (1, 7, 5)\}$

b) $M = \{ u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (1, 1, 1), u_3 = (3,4,2),$

$u_4 = (7, 2,1)\}$

c) $M = \{ u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (2, 3, 4), u_3 = (3, 4, 5) \}$

d) $M = \{ u_1 = (1, 1, 2), u_2 = (1,2,1), u_3 = (3, 2, 2) \}$

Bài 4.6 Trong mỗi trường hợp sau đây, hãy xác định tham số m để:

a) $M = \{ (0, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 3, m)\}$ sinh ra $\mathbb{R}^3$.

b) $M = \{ (1, 2, -1), (0, 3, 1), (1, 5, 0), (3, 9, m)\}$ không sinh ra $\mathbb{R}^3$.

c) $M=\{(m,3,1), (0,m-1, 2), (0, 0, m+1)\}$ không là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Bài 4.7 Trong $\mathbb{R}^4$, cho các không gian véctơ con:

$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4: x_1 + x_2 = 2x_3, x_1 - x_2 = 2x_4 \}$

$W_2 = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4: x_1 = x_2 = x_3 \}$

Tìm một cơ sở của W_1, một cơ sở của W_2.

Bài 4.8 Trong $\mathbb{R}^4$ cho tập

$$B = \{(1, 2, -1, -2), (2,3, 0, -1), (1, 2, 1, 4),(1,3, -1, 0)\}.$$

Chứng minh rằng B là cơ sở của $\mathbb{R}^4$ và tìm tọa độ của véctơ x = (7, 14, -1,2) đối với cơ sở này.

Bài 4.9 Cho $B = \{ u_1, u_2, u_3 \}$ là một cơ sở của không gian véctơ V trên $\mathbb{R}^3$ và đặt

$E = \{v_1 = mu_1 + u_2 + 3u_3,\ v_2 = mu_1 - 2u_2 + u_3,\ v_3 = u_1 - u_2 + u_3\}$

a) Xác định m để E là cơ sở của V.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang E.

Bài 4.10 Trong $\mathbb{R}^3$ cho hai hệ véctơ

$B = \{u_1 = (1,2,3),\ u_2 = (1,1,2),\ u_3 = (1,1,1)\}$

$E = \{v_1 = (2,1,-1),\ v_2 = (3,2,-5),\ v_3 = (1,-1,m)\}$.

a) Chứng minh B là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Xác định m để E là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang E.

Bài 4.11

Trong mỗi trường hợp sau, hãy tìm một cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:

a) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

d) $AX = 0$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ -2 & -5 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 7 & -9 \end{pmatrix}$

Bài 4.12 Trong không gian $\mathbb{R}^3$ xét tích vô hướng Euclide. Hãy áp dụng quá trình trực giao Gram-schmidt để biến cơ sở $\{u_1, u_2, u_3\}$ thành cơ sở trực chuẩn.

a) $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,0)$, $u_3 = (1,2,1)$.

b) $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (3,1,-2)$, $u_3 = (0,1,1)$.

Bài 13: Tìm một sơ sở trực chuẩn của không gian con của $\mathbb{R}^3$

$$W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 + 3x_2 = 5x_3\right\}$$

Bài 4.14 Vẽ các mặt cong bậc 2 sau:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ b) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{1} = 1$

c) $z = x^2 + y^2$ d) $z = 4 + x^2 + y^2$

e) $z = 4 - (x^2 + y^2)$ f) $y = x^2$

g) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ h) $-z = \sqrt{x^2 + y^2}$

CHƯƠNG 5

CHÉO HÓA MA TRẬN và

DẠNG TOÀN PHƯƠNG

5.1. Chéo hoá ma trận

Trong phần này, chúng ta chỉ xét ma trận vuông với các phần tử là các số thực.

5.1.1. Trị riêng và véctơ riêng của ma trận

Cho ma trận vuông cấp n $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$

Định nghĩa: *Nếu tồn tại số λ sao cho có $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta\}$ thỏa*

$$Ax = \lambda x \tag{5.1}$$

thì số λ được gọi là trị riêng của ma trận A, còn véctơ $x \neq \theta$ ở trên gọi là véctơ riêng của A ứng với trị riêng λ.

Ghi chú:

- ☐ Véctơ x ở trên được viết theo dạng ma trận cột.
- ☐ Giới hạn trong chương trình, chúng ta chỉ xét các trị riêng thực của ma trận.

Như vậy, muốn tìm trị riêng của một ma trận A, ta đi giải phương trình

$$\det(A-\lambda I)=0 \qquad (5.2)$$

Phương trình này gọi là **phương trình đặc trưng** của ma trận A

Đa thức $f(\lambda)=\det(\lambda I-A)$ gọi là **đa thức đặc trưng** của ma trận A.

Ví dụ 5. 1 Tìm trị riêng của ma trận $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

Giải:

Để tìm trị riêng của A, ta giải phương trình đặc trưng của A

Do $A-\lambda I=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & \\ & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-\lambda & 3\\ 0 & -1-\lambda\end{bmatrix}$

nên

$$\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda=2\\ \lambda=-1\end{array}\right.$$

Vậy A có hai trị riêng là -1 và 2.

5.1.2. Cách tìm véctơ riêng:

Từ đẳng thức $Ax=\lambda x$, chuyển λx qua vế phải, ta suy ta

$$(A-\lambda I)x=0 \qquad (5.3)$$

Có thể thấy, véctơ riêng ứng trị riêng λ chính là các nghiệm không tầm thường của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (5.3).

Như vậy, để tìm véctơ riêng ứng với trị riêng λ, ta tìm nghiệm không tầm thường của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (5.3).

Hơn nữa, ta biết tập các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất lập thành một không gian con của $\mathbb{R}^n$ (n là cấp của A) nên tập các nghiệm của phương trình $(A-\lambda I)x=0$ lập thành một không gian con của $\mathbb{R}^n$ và gọi là **không gian riêng** ứng với trị riêng λ.

Ký hiệu không giang riêng ứng với trị riêng λ của A là:

$$V_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n / (A-\lambda I)x = 0\} \qquad (5.4)$$

Ví dụ 5. 2 Tìm trị riêng và cơ sở của các không gian riêng tương ứng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Giải:

Giải phương trình đặc trưng của A: $\det(A-\lambda I)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 28+24\lambda+3\lambda^2-\lambda^3=0 \Leftrightarrow -(\lambda-7)(m+2)^2=0$$

Vậy A có hai trị riêng là $7; -2$

Với $\lambda = 7$, phương trình $(A-\lambda I)x=0$ trở thành

$$\begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Suy ra không gian riêng ứng với trị riêng $\lambda = 7$ có cơ sở là

$$\{u = (1,1,1)\}$$

Với $\lambda = -2$, phương trình $(A - \lambda I)x = 0$ trở thành

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 \\ x_2, x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Suy ra không gian riêng ứng với trị riêng $\lambda = -2$ có cơ sở là

$$\{u_1 = (-1,1,0), u_2 = (-1,0,1)\}$$

Để ý, các cơ sở của không gian riêng trong ví dụ trên chính là hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất $(A - \lambda I)x = 0$.

<u>Chú ý:</u>

- Nếu x là véctơ riêng của A ứng với trị riêng λ thì $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, véctơ αx cũng là véctơ riêng ứng với trị λ.
- Một ma trận A cấp n có n trị riêng nhưng có thể một số trị riêng trùng nhau (nghĩa là số các trị riêng khác nhau có thể nhỏ hơn n)

Định lý: *Các véctơ riêng ứng với các giá trị riêng khác nhau tạo thành một hệ véctơ độc lập tuyến tính.*

Ví dụ 5. 3 Trong ví dụ 5.1 ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ có 2 giá trị riêng là -1 và 2.

Ứng với trị riêng -1, phương trình $(A - \lambda I)x = 0$ trở thành

$$3x_1 + x_2 = 0$$

Thấy ngay véctơ $u_1 = (1;-3)$ là một véctơ riêng ứng với trị riêng -1.

Tương tự, ứng với trị riêng 2, ta tìm được véctơ riêng tương ứng là $u_2 = (1;0)$. Vì 2 véctơ riêng này ứng với hai trị riêng khác nhau nên chúng độc lập tuyến tính.

5.1.3. Chéo hoá ma trận

Định nghĩa: *Ma trận vuông A cấp n gọi là chéo hóa được nếu tồn tại một ma trận P khả nghịch sao cho* $P^{-1}.A.P = D$ *trong đó D là ma trận chéo. P gọi là ma trận khả nghịch làm chéo hoá ma trận A.*

Ví dụ 5. 4 Ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ là ma trận chéo hoá được vì tồn tại ma trận khả nghịch $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ để $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 2 \end{bmatrix}$: Dạng chéo.

Sau đây ta sẽ nêu điều kiện cần và đủ để A là ma trận chéo hoá được và cách tìm ma trận khả nghịch P làm chéo hoá ma trận A.

Định lý: *Ma trận* $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ *chéo hoá được khi và chỉ khi ma trận A có n véctơ riêng độc lập tuyến tính.*

Hệ quả: *Nếu ma trận* $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ *có n trị riêng thực phân biệt thì A luôn chéo hoá được.*

Vì khi đó ta sẽ tìm đủ n véctơ riêng độc lập tuyến tính của A.

Ví dụ 5. 5 Ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

là ma trận chéo hoá được vì thấy ngay A có 4 trị riêng khác nhau là 1,-1,2,3.

5.1.4. Thuật toán chéo hoá

- Bước 1: Giải phương trình det(A-λI)=0 để tìm các trị riêng
- Bước 2: Ứng với mỗi trị riêng λ_i ta tìm một véctơ riêng p_i

Lưu ý: Nếu λ_i là trị riêng bội k_i thì

$$\text{A chéo hoá được} \Leftrightarrow \dim V_{[\lambda_i]} = k_i,\ \forall i$$

□ Bước 3: Nếu có n véctơ riêng độc lập tuyến tính $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ứng với các trị riêng λ_1, λ_2, …, λ_n (trong đó có thể có một số trị riêng trùng nhau) thì ma trận A chéo hoá được.

Lập ma trận P mà mỗi cột của P là một véctơ riêng:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{bmatrix}$$

Khi đó $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$

Ví dụ 5. 6 Tìm ma trận khả nghịch P (nếu có) làm chéo hoá ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Giải:

Xét phương trình đặc trưng

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda = 2 \\ \lambda = -1\end{array}\right.$$

Với $\lambda = 2$, xét phương trình $(A - \lambda I)x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_2 = 0 \\ -3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Cho $x_1 = 1$, ta tìm được $p_1 = (1,0)$ là véctơ riêng ứng với trị riêng $\lambda = 2$

Với $\lambda = -1$, xét phương trình $(A - \lambda I)x = 0$

$$\Leftrightarrow 3x_1 + 3x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Cho $x_2 = 1$,ta tìm được $p_2 = (-1,1)$ là véctơ riêng ứng với trị riêng $\lambda = -1$

Đặt $$P = [p_1 \ \ p_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đó P là ma trận khả nghịch làm chéo hoá ma trận A và dạng chéo là

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & \\ & -1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 5. 7 Tìm ma trận khả nghịch P (nếu có) làm chéo hoá ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Giải:

Xét phương trình đặc trưng $\begin{vmatrix} 10-\lambda & -9 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 4)^2 = 0$$

Với $\lambda = 4$, $(A - \lambda I)x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 - 9x_2 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2}x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Thấy ngay $V_{\lambda=4}$ là không gian một chiều nên A không thể có hai véctơ riêng độc lập tuyến tính, do đó A không chéo hoá được.

Ví dụ 5. 8

Tìm ma trận khả nghịch P (nếu có) làm chéo hoá ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Giải:

Xét phương trình

$$|A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda=4 \\ \lambda=1 \end{array}\right.$$

Với $\lambda=4$, xét phương trình $(A-\lambda I)x=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 3x_2-3x_3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2=x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Cho $x_3=1$, ta tìm được véctơ riêng $\{p_1=(1,1,1)\}$ ứng với trị riêng $\lambda=4$.

Với $\lambda=1$, xét phương trình $(A-\lambda I)x=0$

$$\Leftrightarrow x_1+x_2+x_3=0$$

Cho $x_1 = 1, x_2 = -1$ và cho $x_1 = 1, x_2 = 1$, ta tìm được $\{p_2 = (1, -1, 0), p_3 = (1, 1, -2)\}$ là các véctơ riêng ứng với $\lambda = 1$

Đặt $P = [p_1 \ \ p_2 \ \ p_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Khi đó P là ma trận khả nghịch làm chéo hoá ma trận A và dạng chéo là

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

5.1.5. Chéo hoá trực giao ma trận đối xứng thực

a. Ma trận trực giao

Định nghĩa: *Ma trận vuông P cấp n gọi là ma trận trực giao nếu các véctơ hàng (cột) của P tạo nên hệ véctơ trực chuẩn (trong* $\mathbb{R}^n$*, với tích vô hướng Euchide)*

Ví dụ 5. 9

$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ là ma trận trực giao.

Để ý, nếu coi $p_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $p_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ là các véctơ ứng với cột 1, cột 2 của P thì ta có $\{p_1, p_2\}$ lập thành một hệ trực chuẩn trong $\mathbb{R}^2$.

Định lý: *P là ma trận trực giao khi và chỉ khi* $P^T = P^{-1}$

Vậy nếu P là ma trận trực giao thì ma trận nghịch đảo của nó chính là ma trận chuyển vị của nó.

Ví dụ 5. 10 Có thể kiểm tra được $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ là ma trận trực giao, vậy nghịch đảo của ma trận P là

$$P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Định nghĩa: *Ma trận vuông A gọi là chéo hoá trực giao được nếu tồn tại ma trận trực giao P sao cho* $P^{-1}AP$ *là ma trận chéo. Khi đó ta cũng nói P là ma trận làm chéo hoá trực giao ma trận A.*

Sau đây ta nêu các điều kiện để A chéo hoá trực giao được qua các định lý sau:

Định lý 1: *Điều kiện cần và đủ để ma trân vuông A chéo hoá trực giao được là A có* n *véctơ riêng trực chuẩn.*

Vì khi đó, theo thuật toán chéo hoá ma trận, ta sẽ có ma trận trực giao P.

Định lý 2: *Nếu A là ma trận đối xứng thì các véctơ riêng thuộc các không gian riêng khác nhau sẽ trực giao theo tích vô hướng Euclide trong* $\mathbb{R}^n$

Chẳng hạn, trong ví dụ 5. 8, các hệ véctơ p_1, p_2 (hay p_1, p_3) lập thành một hệ trực chuẩn vì p_1 và p_2 (hay p_1 và p_3) thuộc các không gian riêng ứng với trị riêng $\lambda = 4, \lambda = 1$. Để ý p_2, p_3 không trực giao nhau.

Định lý sau cho ta biết chỉ có một dạng ma trận có thể chéo hoá trực giao được.

Định lý 3: *A là ma trận chéo hoá trực giao được khi và chỉ khi A là ma trận đối xứng.*

Hơn nữa ma trận đối xứng còn có tính chất sau:

Định lý 4: *Nếu A là một ma trận dối xứng thực thì*

- *A chỉ có trị riêng thực*
- *Nếu A có* λ *là trị riêng bội k thì ứng với* λ *luôn có thể tìm được k véctơ riêng độc lập tuyến tính*

b. Thuật toán chéo hoá trực giao

$A = \left(a_{ij}\right)_{nxn}$ là ma trận đối xứng thực

- ☐ Bước 1: Giải phương trình det(A-λI)=0 để tìm trị riêng
- ☐ Bước 2: Ứngvới mỗi trị riêng λ_i, ta tìm một véctơ riêng u_i. Nếu λ_i là trị riêng bội k thì ứng với nó ta phải tìm đủ k véctơ riêng độc lập tuyến tính.
- ☐ Bước 3: Ap dụng quá trình trực chuẩn cho các véctơ riêng tìm được ở bước 2 (thực chất ta chỉ áp dụng cho các véctơ riêng có cùng trị riêng vì các véctơ riêng ứng với trị riêng khác nhau thì tự chúng trực giao nhau) để được hệ véctơ riêng trực chuẩn $\left\{p_1, p_2, \ldots, p_n\right\}$
- ☐ Bước 4: Lập ma trận trực giao P mà mỗi cột là một véctơ từ hệ véctơ riêng trực chuẩn. Ma trận này là ma trận làm chéo hoá trực giao ma trận A.
- ☐ Bước 5: Lập D là ma trận chéo mà trên đường chéo là các trị riêng λ_i, tương ứng theo đúng thứ tự với hệ véctơ riêng trực chuẩn $\left\{p_1, p_2, \ldots, p_n\right\}$. Khi đó ta có:

$$P^{-1}.A.P = P^T.A.P = D$$

Ví dụ 5. 11 Chéo hoá trực giao ma trận đối xứng sau đây

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Giải:

Xét phương trình đặc trưng

$$\left|A-\lambda I\right|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda=4 \\ \lambda=1 \end{array}\right.$$

Với $\lambda=4$, xét phương trình $(A-\lambda I)x=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 3x_2-3x_3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2=x_3 \\ x_3\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Cho $x_3=1$, ta tìm được $u_1=(1,1,1)$ là véctơ riêng của A ứng với trị riêng $\lambda=4$

Với $\lambda=1$, xét phương trình $(A-\lambda I)x=0$

$\Leftrightarrow x_1+x_2+x_3=0$

Ta tìm được $u_2=(1,-1,0), u_3=(1,1,-2)$ là các véctơ riêng độc lập tuyến tính của A ứng với trị riêng $\lambda=1$

Trực chuẩn hoá các véctơ riêng tìm được ở trên, ta được hệ véctơ riêng trực chuẩn của A là

$$p_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$p_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$p_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Đặt
$$P = [p_1 \;\; p_2 \;\; p_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Khi đó P là ma trận trực giao làm chéo hoá trực giao ma trận A và dạng chéo là

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

5.2. Dạng toàn phương

5.2.1. Định nghĩa

Dạng toàn phương thực n biến ký hiệu là $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ *là đa thức đẳng cấp bậc 2 theo các biến* x_i.

Nghĩa là

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}x_1^{\ 2} + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n \\ &\quad + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^{\ 2} + ... + a_{2n}x_2x_n \\ &\quad + ... \\ &\quad + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_2x_n + ... + a_{nn}x_n^{\ 2} \qquad (a_{ij} \in R) \end{aligned}$$

Ví dụ 5. 12 $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + 3x_2x_3$
là dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^3$.

Ma trận của dạng toàn phương

Nếu ta ký hiệu véctơ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$; $x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \ ... \ x_n \end{bmatrix}$

và đặt $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$

thì dạng toàn phương có thể viết dưới dạng ma trận như sau

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = x^T A x \tag{5.6}$$

Ma trận A được gọi là **ma trận của dạng toàn phương.**

Nhận xét: A là ma trận đối xứng thực.

Ví dụ 5. 13 Dạng toàn phương

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + 3x_2x_3$$

có ma trận là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 5. 14 Viết ma trận của dạng toàn phương

$$f(x) = 2x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + 4x_2x_3$$

Giải:

Ma trận của dạng toàn phương đã cho là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1/2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

5.2.2. Hạng của dạng toàn phương

Hạng của dạng toàn phương $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ *ký hiệu là r(f), chính là hạng của ma trận của dạng toàn phương: r(f)=r(A)*

Ví dụ 5. 15 Tìm hạng của dạng toàn phương

$$f(x) = 2x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + 4x_2x_3$$

Giải:

Ma trận của dạng toàn phương đã cho là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1/2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Biến đổi A về dạng bậc thang

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -9/2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vậy hạng của dạng toàn phương là $r(f) = r(A) = 3$

5.2.3. Dạng toàn phương chính tắc

Dạng toàn phương được gọi là ở dạng chính tắc nếu

$$\begin{cases} a_{ii} = \lambda_i, \forall i = \overline{1,n} \\ a_{ij} = 0, \forall i \neq j; i,j = \overline{1,n} \end{cases} \quad (5.7)$$

Thấy ngay dạng toàn phương ở dạng chính tắc sẽ có dạng sau:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1{}^2 + \lambda_2 x_2{}^2 + \ldots + \lambda_n x_n{}^2 \quad (5.8)$$

hay có thể viết ở dạng ma trận là $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x^T D x$

trong đó D là ma trận chéo $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}$

Nếu dạng chính tắc mà có các λ_i chỉ nhận một trong 3 giá trị 1, -1, 0 thì dạng toàn phương gọi là có ***dạng chuẩn****.*

Ví dụ 5. 16 Dạng toàn phương $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2$ là dạng toàn phương ở dạng chính tắc.

5.2.4. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

a. Phương pháp phép biến đổi trực giao

Cho dạng toàn phương $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x^T A x$

Nhận thấy, vì A là ma trận đối xứng thực nên tồn tại ma trận trực giao P để $P^{-1}AP$ có dạng chéo.

Đặt $x = Py$ (phép biến đổi này gọi là phép biến đổi trực giao)

Khi đó

$$f(x) = x^T A x = (Py)^T A(Py)$$

$$= y^T P^T A P y = y^T D y \text{ (} D \text{ là ma trận chéo)} \qquad (5.9)$$

tức là dạng toàn phương f có dạng chính tắc theo biến y .

Vậy ta có thuật toán sau để đưa dạng toàn phương đã cho về dạng chính tắc.

Thuật toán

- Bước 1: lập ma trận A của dạng toàn phương (A là ma trận đối xứng thực)

- Bước 2: Thực hiện thuật toán chéo hoá trực giao ma trận đối xứng thực A. Tìm ma trận trực giao P và ma trận chéo D sao cho:

$$P^{-1}.A.P = P^T.A.P = D$$

- Bước 3: Kết luận

Với phép biến đổi trực giao $x = Py$ trong đó $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

dạng toàn phương đã cho sẽ đưa được về dạng chính tắc:

$$f(y) = y^T D y = \lambda_1 {y_1}^2 + \lambda_2 {y_2}^2 + \dots + \lambda_n {y_n}^2$$

Ví dụ 5. 17 Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Giải:

Ma trận của dạng toàn phương đã cho là:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Đây chính là ma trận trong ví dụ 5.8

Vậy ma trận A có các trị riêng là 4;1

Với các trị riêng này, ta tìm được các véctơ riêng trực chuẩn

$$p_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$p_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$p_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Đặt $P = [p_1\ \ p_2\ \ p_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

Khi đó P là ma trận trực giao làm chéo hoá ma trận A.

Phép biến đổi trực giao $x = Py$ đưa dạng toàn phương đã cho về dạng chính tắc theo biến y là

$$f(y) = 4y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

b. Phương pháp Lagrange

Để đưa dạng toàn phương $f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ về dạng chính tắc theo phương pháp Lagrange, ta thực hiện liên tiếp các phép biến đổi theo thứ tự các bước sau:

- Bước 1: Nếu $a_{11} \neq 0$ thì ta nhóm tất cả các số hạng chứa x_1 vào rồi một nhóm rồi bằng cách thêm bớt ta biến đổi sao cho thành bình phương một tổng, ngoài tổng này ra không còn số hạng nào chứa x_1.

Nếu $a_{11}=0$ thì ta chọn $a_{ii} \neq 0$ nào đó và làm việc với x_i như trên ta làm với x_1.

Nếu $\forall a_{ii} \neq 0$ thì chọn $a_{ij} \neq 0$ nào đó rồi thực hiện biến đổi phụ

$x_i = x'_i - x'_j; \quad x_j = x'_i + x'_j$ và

$2a_{ij}x_ix_j = 2a_{ij}\left(x'_i\right)^2 - 2a_{ij}\left(x'_j\right)^2$ thỏa mãn

$a'_{ij} = 2a_{ij} \neq 0$

- Bước 2,3 tiếp tục làm như bước 1 với các biến $x_2, x_3, \ldots$

Sinh viên tìm hiểu thêm qua ví dụ sau.

Ví dụ 5. 18 Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

a). $f\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2$

b). $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1x_2 + x_2x_3$

Giải:

a).Bằng cách thêm bớt để được hằng đẳng thức $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, ta được:

$$f = \left(x_1^2 - 2x_1\frac{x_2}{2} + \left(\frac{1}{4}x_2^2\right)\right) - \frac{1}{4}x_2^2 + 2x_2^2$$

$$= \left(x_1 - \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}x_2^2$$

Đặt $\begin{cases} y_1 = x_1 - \dfrac{x_2}{2} \\ y_2 = x_2 \end{cases}$

Vậy theo biến $y = (y_1, y_2)$, dạng toàn phương đã cho có dạng chính tắc là

$$f(y) = y_1^2 + \frac{7}{4} y_2^2$$

b). $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2$

Đặt $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \end{cases}$

suy ra $f = y_1^2 - y_2^2$ là dạng chính tắc của dạng toàn phương.

c. Định luật quán tính

Qua các ví dụ trên ta thấy có nhiều cách đưa một dạng toàn phương về dạng chính tắc, và các dạng chính tắc của một dạng toàn phương có thể khác nhau nhưng:

Số hệ số âm và số hệ số dương trong dạng chính tắc của một dạng toàn phương không đổi.

Ví dụ 5. 19 Cho dạng toàn phương đã ở dạng chính tắc

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2$$

Nếu ta thực hiện phép biến đổi $\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \dfrac{1}{2} y_2 \end{cases}$

thì dạng toàn phương sẽ ở dạng chuẩn tắc (cũng là dạng chính tắc như sau)

$$f(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$$

Dạng chính tắc mới này có các hệ số khác với dạng trước nhưng số các hệ số dương luôn là 2, số các hệ số âm luôn là 0.

5.2.5. Phân loại dạng toàn phương

a. Định nghĩa:

Dạng toàn phương $f(x)$ gọi là

- xác định dương nếu $\forall x \neq \theta$ ta đều có $f(x) > 0$

- xác định âm nếu $\forall x \neq \theta$ ta đều có $f(x) < 0$

- nửa xác định dương nếu $\forall x \neq \theta$ ta đều có $f(x) \geq 0$

- nửa xác định âm nếu $\forall x \neq \theta$ ta đều có $f(x) \leq 0$

- không xác định về dấu nếu tồn tại $x^1, x^2 \neq \theta$ sao cho

$$f(x^1).\, f(x^2) < 0$$

Ví dụ 5. 20

$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$ là dạng toàn phương xác định dương.

$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2$ là dạng toàn phương xác định dương vì $f(x_1, x_2) = \left(x_1 - \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}x_2^2$.

$f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 3x_2^2$ là dạng toàn phương xác định âm.

$f(x_1, x_2) = x_1x_2$ là dạng toàn phương không xác định dấu, vì chỉ cần chọn $x^1 = (1,1), x^2 = (1,-1)$ sẽ thấy ngay $f(x^1).\ f(x^2) < 0$

Qua các ví dụ trên, ta có thể thấy rằng việc phân loại dạng toàn phương được thực hiện dễ dàng nếu nó ở dạng chính tắc.

b. Phân loại dạng toàn phương qua dạng chính tắc

Khi đưa dạng toàn phương $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ về dạng chính tắc

$$f_{CT}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lambda_1 {y_1}^2 + \lambda_2 {y_2}^2 + \dots + \lambda_n {y_n}^2$$

bằng phương pháp biến đổi tuyến tính không suy biến $x = Py$ với $|P| \neq 0$ ta có

- Nếu $\lambda_i > 0\ \forall i$ thì $f(x)$ xác định dương
- Nếu $\lambda_i < 0\ \forall i$ thì $f(x)$ xác định âm
- Nếu $\lambda_i \geq 0\ \forall i$ và có ít nhất một giá trị $\lambda_k = 0$ thì $f(x)$ nửa xác định dương
- Nếu $\lambda_i \leq 0\ \forall i$ và có ít nhất một giá trị $\lambda_k = 0$ thì $f(x)$ nửa xác định âm

- Nếu có ít nhất một giá trị $\lambda_i < 0$ và có ít nhất một giá trị $\lambda_j > 0$ thì $f(x)$ không xác định về dấu.

Nhận xét: Việc phân loại dạng toàn phương hoàn toàn có thể dựa vào các giá trị riêng λ_i của ma trận của nó với các lập luận hoàn toàn như trên.

Ví dụ 5. 21 Dạng toàn phương

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

xác định dương vì theo ví dụ 5.17, ma trận của dạng toàn phương có các trị riêng dương là 4;1.

5.2.6. Tiêu chuẩn Sylvester

a. Định thức con chính của một ma trận vuông

Cho ma trận vuông $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Ta gọi các định thức con của A có dạng:

$$\Delta_1 = a_{11};\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \dots;$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}; \dots;\ \Delta_n = |A| \qquad (5.10)$$

là các định thức con chính của A. Một ma trận vuông cấp n chỉ có n định thức con chính.

Có thể thấy, định thức con chính cấp k của ma trận A có được bằng cách chọn ra các phần tử nằm trong k hàng và k cột đầu tiên của A tính từ góc trên bên trái và giữ nguyên vị trí như khi chúng ở trong ma trận A.

Ví dụ 5. 22 Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ có các định thức con chính là

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = \det(A)$$

b. Định lý Sylvester

- *Cho dạng toàn phương $f(x) = x^T Ax$, khi đó*
- *$f(x)$ xác định dương nếu tất cả các định thức con chính của A đều dương:*

$$\Delta_1 > 0; \Delta_2 > 0; ...; \Delta_n = |A| > 0 \qquad (5.11)$$

- *$f(x)$ xác định âm nếu tất cả các định thức con chính cấp lẻ của A đều âm và tất cả các định thức con chính cấp chẵn của A đều dương:*

$$\Delta_1 < 0;\ \Delta_2 > 0;\ \Delta_3 < 0;\ \ldots;\ \Delta_{2k-1} < 0;\ \Delta_{2k} > 0;\ldots \quad (5.12)$$

Ví dụ 5. 23 Xét dấu của các dạng toàn phương sau:

a). $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

b). $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 + 3x_1x_2$

Giải:

a). Ma trận của f: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

Các định thức con chính của A là

$$\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

Vậy f là dạng toàn phương xác định dương.

b) Ma trận của f: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 2 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Các định thức con chính của A là

$$\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{7}{4} > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3/2 & 2 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{25}{4} < 0$$

Vậy dạng toàn phương này không xác định dấu.

BÀI TẬP

<u>Bài 5.1</u>: Tìm trị riêng và cơ sở của các không gian riêng tương ứng của các ma trận sau đây:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Bài 5.2: Chéo hóa các ma trận sau (nếu được)

a) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Bài 5.3: Chéo hoá trực giao các ma trận đối xứng sau:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Bài 5.4: Đưa dạng toàn phương f về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao, tìm hạng và xét dấu dạng toàn phương f.

1) $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 8x_2^2 - 4x_1x_2$

2) f(x1, x2, x3) = $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

4) f(x1, x2, x3) = $4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

5) f(x1, x2, x3) = $3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$

6) f(x1, x2, x3) = $2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

7) f(x1, x2, x3) = $-2x_1^2 - 5x_2^2 - 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$

8) f(x1, x2, x3) = $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

9) f(x1, x2, x3) = $2x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

10) f(x1, x2, x3) = $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

Bài 5.5: Đưa dạng toàn phương f về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange, tìm hạng và xét dấu dạng toàn phương f.

a). f(x1, x2, x3) = $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

b). f(x1, x2, x3) = $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

c). f(x1, x2, x3) = $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$

d). f(x1, x2, x3) = $2x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

e). f(x_1, x_2, x_3) = $2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

<u>Bài 5.6</u>: Hãy xác định tham số m để sau dạng toàn phương xác định dương.

a) f(x_1, x_2, x_3) = $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2mx_1x_3 + 2x_2x_3$

b) f(x_1, x_2, x_3) = $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2mx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN

CHƯƠNG 1

<u>Bài 1.2</u>: $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2y) = 5 + 6i$

Ta rút gọn để tìm phần thực và phần ảo của vế trái, sau đó cho phần thực và phần ảo của hai vế trùng nhau để tìm x,y.

Vế trái$=6x+1+(3x-2)i+(x+2xy)+\left(-y-2y^2\right)i$

$=(7x+2xy+1)+i\left(3x-2-y-2y^2\right)$

suy ra hệ phương trình

$$\begin{cases} 7x+2xy+1=5 \\ 3x-2-y-2y^2=6 \end{cases} \cdots$$

<u>Bài 1.3:</u> $z_1 = \dfrac{5-i}{4}; \quad z_2 = \dfrac{2+i}{2}$

<u>Bài 1.4:</u>

a) $z = x \in R; x > 0$

$$b)\ \left[\begin{array}{l} z = 0 \\ z = 1 \\ z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i \\ z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i \end{array}\right.$$

Bài 1.5:

a). $z = -2 = 2\left[\cos(\pi + k2\pi) + i\sin(\pi + k2\pi)\right]$

c). $z = -2 + 2\sqrt{3}i = 4\left[\cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\right)\right]$

d). z=$2\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{4} + k2\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{4} + k2\pi\right)\right]$

Bài 1.6:

$$z = 1\left(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}\right) = -i$$

Bài 1.7:

a) $\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$$\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^7 = 2^7\left(\cos\frac{14\pi}{3} + i\sin\frac{14\pi}{3}\right)$$

$$= 2^7\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=-2^6 + 2^6 i\sqrt{3}$$

CHƯƠNG 2

Bài 2.1:

a) $\begin{pmatrix} -19 & 14 & 11 \\ -23 & 81 & 40 \\ 0 & 0 & 0 \\ -17 & 31 & 16 \end{pmatrix}$ **b)** (19) **c)** $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 45 & 15 \\ 3 & 12 & 27 & 9 \\ 2 & 8 & 18 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 12 & 17 \\ 0 & 29 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Chứng minh bằng qui nạp)

Bài 2.2:

a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 1 \\ w = 3 \end{cases}$ b) $X = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Bài 2.3:

a) $(AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} 40 & 20 & -10 \\ 32 & 24 & -2 \\ 70 & 37 & -16 \end{pmatrix}$

$$C^TB^TA^T = (ABC)^T = \begin{pmatrix} 40 & 32 & 70 \\ 20 & 24 & 37 \\ -10 & -2 & -16 \end{pmatrix}$$

b) $f(A) = 2A^2 + 3A + 5I_3 - 2A^{-1} = \begin{pmatrix} 36 & 23 & 41 \\ 15 & 27 & 42 \\ 30 & 38 & 92 \end{pmatrix}$

Bài 2.4:

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ d) $X = \begin{pmatrix} 36 & 148 \\ 1 & -28 \\ -16 & -36 \end{pmatrix}$

Bài 2.5:

a) –56

b) 27

c) 168

d) $x^2(x - y - z)(x + y + z)$

e) $abc + abx + acx + bcx$

f) $(a'-a)^2(b'-b)^2$

g) $(-1)^{n-1}n!$

Bài 2.6:

a) $x = 2 \vee x = 3 \vee x = 4$; b) x tùy ý thuộc R

c) $-6 < x < -4$

d) $7 - 13x + 7x^2 - x^3 = 0$, $x \in \{1, 3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}\}$

Bài 2.7:

a) 3 b) 2 c) 2

Bài 2.8:

a) Không tồn tại m, A~ $\begin{bmatrix} 1 & m & 1 & 3 \\ 0 & m & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-m & -\dfrac{-4\,m+2\,m^2+1}{m} \end{bmatrix}$

b) m =1 , A~ $\begin{bmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \dfrac{m-1}{m} & \dfrac{m-1}{m} & \dfrac{m^3-1}{m} \\ 0 & 0 & 1-m & m-m^3-m^2+1 \end{bmatrix}$

c) Không tồn tại m.

Bài 2.9:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 22-2\,m \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nếu m =11 thì r(A) = 2 ; nếu m ≠ 11 thì r(A) = 3.

Bài 2.10: $\begin{bmatrix} -8 & 5 & -2 \\ 27 & -16 & 6 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Bài 2.11: $\begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \end{bmatrix}$

CHƯƠNG 3

Bài 3.1:

a) (x, y, z) = (10, -16, 7)

b) (x, y, z) = (2, -1, -1)

c) (x, y, z) = $\left(\frac{488}{101}, \frac{330}{101}, \frac{-203}{101}\right)$

d) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-4t + \frac{9}{5},\ t,\ -\frac{2}{5},\ 3t - \frac{1}{5}\right)$, $\forall t \in R$.

Bài 3.2:

a) det(A)= $-m^2 - 5m$

Nếu m = -5 thì hệ vô nghiệm

Nếu m = 0 hệ có họ nghiệm (2-3t, 6t –1, t)

Nếu m ≠ -5 và m ≠ 0 thì hệ có nghiệm duy nhất là:

$$(x, y, z) = \left(\frac{m+7}{m+5}, \frac{1}{m+5}, \frac{1}{m+5}\right)$$

b) det(A)=-7

Hệ luôn có nghiệm duy nhất là:

$$(x, y, z) = \left(\frac{22}{7}m - \frac{3}{7},\ \frac{5}{7}m - \frac{1}{7},\ -\frac{13}{7}m + \frac{4}{7}\right)$$

c) det(A)= $m^3 - 3m + 2$

Nếu m = -2 thì hệ vô nghiệm

Nếu m = 1 hệ có họ nghiệm (s + t + 1, -s, -t) $\forall s, t \in R$.

Nếu $m \neq -2$ và $m \neq 1$ thì hệ có nghiệm duy nhất là:

$$(x, y, z) = \left(-\frac{m+1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{(m+1)^2}{m+2}\right)$$

d) $\det(A) = -4m + m^3$

Nếu $m = 2$ thì hệ vô nghiệm

Nếu $m = -2$ thì hệ có họ nghiệm $(x, y, z) = (t, -t, 0)$

Nếu $m = 0$ thì hệ có họ nghiệm $(x, y, z) = (1-3t, 1+t, 2t)$

Nếu $m \neq -2$, $m \neq 2$, và $m \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất là:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{m-2}, \frac{m+3}{2-m}, \frac{m+2}{2-m}\right)$$

e) $$\bar{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & m-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m+2 \end{bmatrix}$$

Nếu $m \neq -2$ thì hệ vô nghiệm

Nếu $m = -2$ hệ có họ nghiệm:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (s - 4t - 1, 2s + t - 1, 3s, 3t)$$

Bài 3.3:

a) $$\bar{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & -m+1 & 1-m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & m-3 \end{bmatrix}$$

Nếu $m = -2$ v $m = 1$ thì hệ vô nghiệm.

Nếu $m \neq -2$ và $m \neq 1$ thì hệ có nghiệm duy nhất

b) $\overline{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & -2 & -m-m^2 & -1-m \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}m+1-\frac{1}{2}m^3 & m-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m^2 \end{bmatrix}$

Nếu $m = 1$ thì hệ có họ nghiệm VSN

Nếu $m \neq 1$ thì hệ có nghiệm duy nhất

Bài 3.4: Ký hiệu $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

a) (a, b, c, d) = (2, -3, 1, 2)

b) (a, b, c, d) = (1, 1, -3, 5)

Bài 3.5: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

a) (x, y, z) = (47 - 8m, 5m- 29, m-5)

b) (x, y, z) = (1, 2, -1)

c) (x, y, z) = (5m +1, m + 1, 2 - m)

d) (x, y, z) =(-3-2m,-11-6m,-m-2)

Bài 3.6: a) Hệ nghiệm cơ bản là : (1, 1, 2)

b) Hệ nghiệm cơ bản là : (2,10,7,0); (-5,-4, 0, 7)

CHƯƠNG 4

Bài 4.1:

a) Không là không gian véctơ.

b) Là không gian con.

c) Không là không gian véctơ.

Bài 4.2:

a) $m \neq 6$ HD: $\overline{A} \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & m-6 & \frac{17}{4} \end{bmatrix}$

b) $\forall$ m $\in$ R

c) m = -8 , HD $\overline{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & m+3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{24}{5}+\frac{3m}{5} \end{bmatrix}$

d) m = 1 , HD $\overline{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 16 & m \\ 0 & -7 & -23 & 4-2m \\ 0 & 0 & \frac{-2}{7} & \frac{11}{7}-\frac{9m}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{21}{2}+\frac{21m}{2} \end{bmatrix}$

Bài 4.3:

a) Độc lập tuyến tính.
b) Nếu m = 4 thì phụ thuộc tuyến tính. Nếu m $\neq$ 4 thì độc lập tuyến tính.
c) Phụ thuộc tuyến tính.

Bài 4.4:

a) r = 2, hệ phụ thuộc tuyến tính

b) r = 3, hệ độc lập tuyến tính

b) r = 2, hệ phụ thuộc tuyến tính

d) r=3, hệ phụ thuộc tuyến tính.

Bài 4.5:

a) Không là cơ sở
b) Không là cơ sở.
c) Không là cơ sở.
d) Là cơ sở.

Bài 4.6:

a) $m \neq 2$ b) $m = -2$ c) $m= -1$ v $m = 0$ v $m =1$

Bài 4.7:

$\{u_1 = (1, 1, 1, 0)$, $v_1 = (1, -1, 0, 1)\}$ là một cơ sở của W_1

$\{u_2 = (1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (1, -1, 0, 1)\}$ là một cơ sở của W_2

Bài 4.8: $[x]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Bài 4.9:

a) $m \neq \frac{7}{5}$ b) $P_{(B\to E)} = \begin{pmatrix} m & m & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Bài 4.10:

a) $m \neq 10$

b) Ma trận chuyển cơ sở từ B sang E :

$$P_{(B\to E)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -6 & m+3 \\ 4 & 10 & -m \end{pmatrix}$$

Bài 4.11:

a) Cơ sở $\{(1, 1, 1)\}$, dim = 1.

b) Cơ sở $\{(1, -2, 1)\}$, dim = 1.

c) Cơ sở $\{(5, 4, 0, -7), (-3, 0, 2, 5)\}$, dim = 2.

Bài 4.12:

a) Cơ sở trực chuẩn

$$\left\{v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)\right\}.$$

b) Cơ sở trực chuẩn

$$\left\{v_1 = (1,0,0), v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,-2), v_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(0,6,3)\right\}.$$

CHƯƠNG 5

Bài 5.1:

a) Trị riêng và vectơ riêng cơ sở tương ứng của A là

$$\lambda = 3 \xrightarrow{\text{vec tơ riêng cơ sở}} X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1 \xrightarrow{\text{vec tơ riêng cơ sở}} X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $|A-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad (1)$

□ Xét trêng trường số thực : Vì phương trình (1) vô nghiệm trêng trường số thực nên A không có trị riêng và vectơ riêng.

□ Xét trêng trường số phức : Pt (1) $\Leftrightarrow \lambda = 2 \pm i$

$$\lambda = 2 + i \xrightarrow{\text{vec tơ riêng cơ sở}} X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2 - i \xrightarrow{\text{vec tơ riêng cơ sở}} X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

c) Trị riêng duy nhất $\lambda = 2 \xrightarrow{\text{vec tơ riêng cơ sở}} X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) $\lambda = 1 \xrightarrow{\text{vec tơ riêng cơ sở}} X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\lambda = -1 \xrightarrow{\text{vec tơ riêng cơ sở}} X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 \xrightarrow{\text{vec tơ riêng cơ sở}} X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bài 5.2:

a) Đặt $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ thì $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$

b) Không chéo hóa được.

c) Đặt $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ thì $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$

e) Đặt P $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ thì $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$

f) Đặt $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ thì $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$

Bài 5.3:

a) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $P^{-1}\,A\,P = P^{T}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

b) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $P^{-1}\,A\,P = P^{T}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $P^{-1}\,A\,P = P^{T}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $P^{-1}\,A\,P = P^{T}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

e) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $P^{-1} A P = P^T AP = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bài 5.4:

a) Với $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, phép đổi biến trực giao X = PY đưa dạng chính tắc $f_{CT}(Y) = 4y_1^2 + 9y_2^2$. Hạng r(f) = 2 , f xác định dương.

Với $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, phép đổi biến trực giao X = PY đưa dạng toàn phương f về dạng chính tắc là $f_{CT}(y)$.

b) $f_{CT}(Y) = 2y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$, $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$,

r(f) = 3 , f không xác định dấu.

c) $f_{CT}(Y) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2$, $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$,

r(f) = 3, f xác định dương.

d) $f_{CT}(Y) = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 8y_3^2$, $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

r(f) = 3, f xác định dương.

e) $f_{CT}(Y) = 2y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$, $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

r(f) = 3 , f không xác định dấu.

f) $f_{CT}(Y) = 2y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2$, $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

r(f) = 3, f xác định dương.

g) $f_{CT}(Y) = -y_1^2 - y_2^2 - 10y_3^2$, $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$

r(f) = 3, f xác định âm.

h) $f_{CT}(Y) = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$, $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$

r(f) = 3, f xác định dương

i) $f_{CT}(Y) = y_1^2 + y_2^2 + 7y_3^2$, $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

r(f) = 3, f xác định dương

Bài 5.6:

a) $-2 < m < 2$ b) $-\frac{4}{5} < m < 0$

Bài 5.7:

a) Thực hiện phép biến đổi : $\begin{cases} x = u - \frac{12}{11}v \\ y = v \end{cases}$ ta được PT tương đương

$$\frac{u^2}{\frac{15}{11}} - \frac{v^2}{\frac{33}{20}} = 1$$

Đồ thị là một đường Hypebol

b) Thực hiện phép biến đổi : $\begin{cases} x = u + \frac{2}{5}v \\ y = v \end{cases}$ ta được PT tương đương

$$\frac{u^2}{\frac{36}{5}} + \frac{v^2}{5} = 1$$

Đồ thị là một đường Elip

c) Thực hiện phép biến đổi : $\begin{cases} x = u + v \\ y = v \end{cases}$ ta được PT tương đương

$$\frac{v^2}{\frac{8}{3}} - \frac{u^2}{4} = 1$$

Đồ thị là một đường Hypebol

d) Thực hiện phép biến đổi : $\begin{cases} x = u - \frac{2}{5}v \\ y = v \end{cases}$ ta được PT tương đương

$$\frac{u^2}{\frac{9}{5}} + \frac{v^2}{\frac{15}{7}} = 1$$

Đồ thị là một đường Elip

Bài 5.8:

a) Mặt bậc hai đã cho là mặt Elipxôit
b) Mặt bậc hai đã cho là mặt Elipxôit
c) Mặt bậc hai đã cho là mặt Hyperboloit một tầng

Đề mẫu

Đề số 1

Câu 1. *(2 điểm)*

Trên không gian R^3, cho 2 tập hợp:

$$A = \{X = (2a - b + c, b - a + c, 5a - 4c - 2b) \mid a, b, c \in R\}$$
$$B = \{X = (x, y, z) \mid z - 5y = 3x\}$$

a/ Chứng minh rằng A và B là không gian vector con của R^3.

b/ Hãy tìm tập sinh, cơ sở, và số chiều cho A và B.

Câu 2. *(3 điểm)*

Trên không gian R^3, cho các vector:

$$\alpha_1 = (-15, 8, -9), \alpha_2 = (12, -6, 7), \alpha_3 = (2, -1, 1), \alpha_4 = (4, 3, 1),$$
$$\alpha_5 = (0, 2, -2), \alpha_6 = (5, 1, 6)$$

và tập hợp $a = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\beta = \{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$

a/ Chứng minh rằng a và β là cơ sở của R^3.

b/ Hãy tìm các ma trận chuyển cơ sở: $\begin{cases} P = P(\beta_0 \to a) \\ Q = P(\beta_0 \to \beta) \end{cases}$, để từ đó suy ra $S = P(a \to \beta)$, với β_0 là cơ sở chính tắc của R^3 ($\beta_0 = \{\varepsilon_1 = (1,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0), \varepsilon_3 = (0,0,1)\}$).

Câu 3. *(3 điểm)*

Cho ma trận thực: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

Hãy chéo hóa ma trận A, rồi sau đó tìm A^n, với n là số nguyên, $n \geq 0$.

Câu 4. *(2 điểm)*

Hãy đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2$$

Đề số 2

Câu 1. *(2 điểm)*

Trên không gian R^3, cho 2 tập hợp:

$$A = \{X = (a - b + c, 3b - 2a - 4c, 3a + 2c - 5b) \mid a, b, c \in R\}$$
$$B = \{X = (x, y, z) \mid 2y - 3z = x\}$$

a/ Chứng minh rằng A và B là không gian vector con của R^3.

b/ Hãy tìm tập sinh, cơ sở, và số chiều cho A và B.

Câu 2. *(3 điểm)*

Trên không gian R^3, cho các vector:

$\alpha_1 = (1,-2,2), \alpha_2 = (2,0,1), \alpha_3 = (2,-3,3), \alpha_4 = (3,4,2), \alpha_5 = (2,5,1), \alpha_6 = (1,2,4)$

và tập hợp $a = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\beta = \{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$

a/ Chứng minh rằng a và β là cơ sở của R^3.

b/ Hãy tìm các ma trận chuyển cơ sở: $\begin{cases} P = P(\beta_0 \to a) \\ Q = P(\beta_0 \to \beta) \end{cases}$,

để từ đó suy ra $S = P(a \to \beta)$, với β_0 là cơ sở chính tắc của R^3 ($\beta_0 = \{\varepsilon_1 = (1,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0), \varepsilon_3 = (0,0,1)\}$).

Câu 3. *(3,5 điểm)*

Cho ma trận thực: $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Hãy chéo hóa ma trận A, rồi sau đó tìm A^n, với n là số nguyên, $n \geq 0$.

Câu 4. *(1,5 điểm)*

Hãy đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Nguyễn Đình Trí (chủ biên)-Toán học cao cấp- tập 1- NXB GD-1996

[2]. Doãn Tam Hòe- Toán học đại cương-Tập 1- NXB GD-1997

[3]. Davis, Ernest-Linear Algebra and Probability for Computer Science Applications-CRC Press -2012